1　解きたい問題

Σ 上の $\mathbb{Z}$-rational series r が与えられる．

- ある $w \in \Sigma^*$ について $(r, w) = 0$ が成立するかどうかは，決定不能である．
- 全ての $w \in \Sigma^*$ について $(r, w) \geq 0$ が成立するかどうかは，決定不能である．

2　K-rational series

以下の文献などを参考：

- Bell：「Matrix equations and Hilbert's tenth problem」
- Salomaa & Soittola：「Automata-theoretic Aspects of Formal Power Series」
- Berstel & Reutenauer：「Rational Series and Their Languages」

K を semiring とし，Σ を有限のアルファベットとする．このとき，formal power series（形式的べき級数） S とは，関数 $S : \Sigma^* \to K$ のことである．

通常 $S(w)$ と書くところを，(S, w) で表すことにして，この (S, w) を w の S における「coefficient（係数）」と呼ぶ．また，この記法を用いて，S を以下の形で表すことが多い：

$$S = \sum_{w \in \Sigma^*} (S, w)w.$$

例えば，全ての係数を 1 にする $\{x\}$ 上の無限級数を考えると以下のようになる：

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{w \in x^*} 1x.$$

特に，$C_P = \{w : (P, w) \neq 0_K\}$ が有限な formal power series P を，polynomial（多項式）と呼ぶ．我々が日常で多項式と呼ぶものと一致するので，違和感はないだろう．

K を係数に持つ Σ 上の *polynomial* 全体を，$K\langle\Sigma\rangle$ であらわす．K を係数に持つ Σ 上の *power series* 全体を，$K\langle\langle\Sigma\rangle\rangle$ であらわす．

べき級数上に，多項式上で見られる演算を自然に拡張したものを定義していく．

まずは，２つのべき級数の加算：

$$(S + T, w) \triangleq (S, w) + (T, w).$$

これは単に，係数部分を足し合わせるだけのものである．

次に，２つのべき級数の積：

$$(S \cdot T, w) \triangleq \sum_{uv=w} (S, u)(T, v).$$

これは，例えば $(x + 2x^2)(1 + 3x) = x + 3x^2 + 2x^2 + 6x^3 = x + 5x^2 + 6x^3$ のような，多項式上の掛け算を思い出すと分かりやすい．w は有限通りの分解しか持たないので，有限和 Σ によって無事に定義されることに注意．

次に，2 通りのスカラ積：

$$(kS, w) \triangleq k(S, w), \quad (Sk, w) = (S, w)k.$$

K は．いちおう，非可換かもしれない semiring を仮定しているので，左から掛けるのと，右から掛けるのを区別している．が，本論では結局，semiring としては $K = \mathbb{Z}$ しか考えない．

次に，star 演算を定義するための準備を行う．形式的べき級数 S が proper であるとは，$(S, \epsilon) = 0$ のとき，すなわち空語の係数が零元になっているものを意味する．このような proper な級数に関しては，次によって，star 演算が定義できる：

$$S^* \triangleq \sum_{i \geq 0} S^i.$$

Proper の条件が必要な理由を，次の具体的な級数をもとに考えてみる：

$$S = 2 + x.$$

このとき，各 $i = 0, 1, 2, \ldots$ について

$$S^0 = 1, \quad S^1 = 2 + x, \quad S^2 = 4 + 4x + x^2, \quad S^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3, \ldots$$

このとき，(S^*, x) は，非零元を加算無限個足すような操作が必要になり，一般の semiring では議論ができない．

一方で，proper な級数であったとすると：

$$S = 2x + x^2, \quad S^2 = 4x^2 + 4x^3 + x^4, \quad S^3 = 8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6, \ldots$$

となって，(S^*, x^n) は,「非零元の有限回の和」で表されることになる．有限和で済むことは，次の命題（proper であれば，最低次数が必ず増える）により保証される．

命題 1. r を proper series とする．このとき，任意の自然数 n と長さ n 未満の文字列 $x \in \Sigma^*$ $(|x| < n)$ について，$(r^n, x) = 0$ が成立する．

この段階で，rational series（有理的級数と訳している人もいるが…）を定義することができる．Σ 上の K を係数にする級数 S は，

1. K-polynomial $K\langle\Sigma\rangle$ をもとに，
2. 上で定義した 4 つの演算（加算，積，2 種類のスカラ積）を組み合わせることで
3. 表現できるときに限り

rational series であるといわれる．形式言語理論での，言語（languages）に対する有理表現・有理言語（rational languages, rational expressions）を知っていれば，非常に馴染み深い定義の仕方である．

最後に，Hadamard 積（アダマール積)：

$$(S \odot T, w) \triangleq (S, w)(T, w).$$

これは係数について掛け算を行うだけである．次の性質を，後で使う：

- 「2 つの rational power series のアダマール積をとったものは，rational power series である.」
- Schutzenberger '61：「On a Theorem of R. Jungen」

3 決定不能性の証明

まず，次を示す．

3.1　ある $w \in \Sigma^*$ について $(r, w) = 0$ が成立するかどうかは，決定不能である．

このために，ヒルベルトの第 10 問題を使う．ヒルベルトの第 10 問題とは，与えられたディオファントス方程式が「自然数解を持つかどうか」，という判定問題であるが，これは既知のように決定不能である [1]．ディオファントス方程式とは

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \equiv \sum a_{e_1\, e_2 \ldots e_m} x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_m^{e_m} = 0 \quad (a_{e_1\, e_2 \ldots e_m} \in \mathbb{Z})$$

なる整数を係数に持つ，多変数の方程式である．

証明の戦略としては，

1. m 次元数ベクトル $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ を，文字列 $[\![(n_1, n_2, \ldots, n_m)]\!] = x^{n_1} y x^{n_2} y \ldots y x^{n_m}$ という y で句切られた，x の個数で数を表現するような，文字列で表現することにする．
2. ディオファントス式 $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ から，rational series r で，以下を満たすものを作る．
   - w が何らかの m 次元数ベクトルの表現 $w = [\![(n_1, n_2, \ldots, n_m)]\!]$ ならば，
   $$(r, w) = (r, [\![(n_1, n_2, \ldots, n_m)]\!]) = P(n_1, n_2, \ldots, n_m).$$
   - w が m 次元数ベクトルの表現になっていない場合は，$(r, w) = 1$.
3. この r については,「$\exists w \in \Sigma^*. (r, w) = 0$」と「$P$ に自然数解があること」は同値になり，ヒルベルトの第 10 問題の決定不能性から，我々の求めていた決定不能性が得られる．

ということで，$P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ から，上記を満たす rational series r を作っていく．

まず，次の基本的なパーツとなる級数が，rational series であることを確かめる：

$$R_j \triangleq \left(\sum_{n_1, \ldots, n_{j-1} \geq 0} x^{n_1} y x^{n_2} y \ldots x^{n_{j-1}} y \right) \left(\sum_{n_j \geq 0} n_j x^{n_j} \right) \left(\sum_{n_{j+1}, \ldots, n_k \geq 0} y x^{n_{j+1}} y \ldots y x^{n_k} \right).$$

これを示すためには，以下の 3 つの級数 R_j^l, R_j^m, R_j^r が，それぞれ rational series であることを確認すれば十分である（$\because$ rational series 全体は積の演算に閉じているので）．

$$R_j^l = \sum_{n_1, \ldots, n_{j-1} \geq 0} x^{n_1} y x^{n_2} y \ldots x^{n_{j-1}} y, \quad R_j^m = \sum_{n_j \geq 0} n_j x^{n_j}, \quad R_j^r = \sum_{n_{j+1}, \ldots, n_k \geq 0} y x^{n_{j+1}} y \ldots y x^{n_k}.$$

まず $R_j^m = \sum_n n x^n$ が rational series であることを示す．

$$x^* = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$
$$x^* x^* = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots,$$

の形をなすことに注意．係数を微調整して，

$$(x^* x^*) - x^* = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$$

目的のものを得る．

次に，$R_j^l = \sum_{n_1, \ldots, n_{j-1}} x^{n_1} y x^{n_2} y \ldots x^{n_{j-1}} y$ が rational series であることを示す．とはいえ，$R_j^l = x^* y x^* y \ldots x^* y$ に他ならない．R_j^r も同様．

[1] 有理数解を持つかどうか，または整数解を持つかどうかとしても同様に決定不能

従って，R_j が rational series であることが分かったが，R_j は以下の性質を持っている：

$$(R_j, [\![(n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots, n_k)]\!]) = (R_j, x^{n_1} y x^{n_2} y \ldots y x^{n_j} y \ldots y x^{n_k}) = n_j.$$

すなわち，$R_1, R_2, \ldots, R_m$ を用いて，変数の，数ベクトルの表現を受け取ると，指定した変数の値を取り出すことができるようになる．

この $R_1, R_2, \ldots, R_m$ を基本パーツとすると，任意のディオファントス方程式を表現できるようになる．例えば，

1. $P(x_1, x_2) \equiv 5 + 2x_1x_2 + 3x_1^2$ だとすると，$5 + 2(R_1 \odot R_2) + 3(R_1 \odot R_1)$ で良い．
2. 多項式での加算とべき級数の加算が対応；多項式での積とべき級数でのアダマール積が対応；多項式でのスカラー積とべき級数でのスカラー積が対応する．

ただし，R_j には微妙な問題点もあって，例えば数ベクトルの符号化を行っていないような文字列 w については，$(R_j, w) = 0$ が成立してしまう．目指すべきは，そのような文字列について $(R_j, w) = 1$ とすることであった．

そこで，P に対応する R を作ったあとに，次のように調整した rational power series S を作る：

$$S \triangleq R + \overline{(x^*y)^{m-1}x^*}.$$

この S が，我々の欲しかった rational power series である．なお，$\overline{(x^*y)^{m-1}x^*}$ は，$(x^*y)^{m-1}x^*$ を $\{x, y\}$ 上の正規表現だと思って，その complement をとったものである．これが rational power series になることは，形式言語理論の基本的な議論から明らか．

3.2 任意の $w \in \Sigma^*$ で $(r, w) \geq 0$ が成立するかどうかは，決定不能である．

先と同じようにして示す．違うところは，ディオファントス式の符号化のところだけ．

1. ディオファントス式 $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ から，rational series r で，以下を満たすものを作る．
   - w が何らかの m 次元数ベクトルの表現 $w = [\![(n_1, n_2, \ldots, n_m)]\!]$ ならば，

     $$(r, w) = (r, [\![(n_1, n_2, \ldots, n_m)]\!]) = P(n_1, n_2, \ldots, n_m)^2 - 1.$$

     2 乗して，全ての値を non negative にしていることに注意．
   - w が m 次元数ベクトルの表現になっていない場合は，$(r, w) = 0$.
2. この r について，「$\forall w \in \Sigma^*. (r, w) \geq 0$」と「$P$ に自然数解があること」は同値になり，ヒルベルトの第 10 問題の決定不能性から，我々の求めていた決定不能性が得られる．

前の議論を利用して，次のようにすれば良い：

$$S \triangleq (R \odot R) - (x^*y)^{m-1}x^*.$$