

1 解きたい問題

整数 $\mathbb{Z}$ を要素にする正方行列の有限集合が与えられる： $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$.

行列 $M_{i_1} \times M_{i_2} \times \dots \times M_{i_j}$ の右上の要素が 0 になるような列 $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_j \leq k$ が存在するかどうかは、決定不能.

同じことだが、 $\mathcal{M}$ から行列積で生成される、行列の semigroup の中に、右上隅の要素を 0 にする行列 M が存在するかどうかは、決定不能.

2 参考

- Vesa Halava 「Decidable and Undecidable Problems in Matrix Theory」の Section 6

3 決定不能性証明のための準備

$\Gamma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ をアルファベットとする.

次のような、文字列から数への写像 $\sigma : \Gamma^* \rightarrow \mathbb{N}$ を考える：

$$\begin{aligned}\sigma(\epsilon) &= 0, \\ \sigma(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}) &= \sum_{j=1}^k i_j \cdot n^{k-j}.\end{aligned}$$

これは n 進数エンコーディングに他ならない. n 進数でみたときの、各桁の値をみれば、元の文字列が復元できる. 従って、以下の性質がなりたつ：

- σ は単射になる.
- $\sigma(uv) = \sigma(v) + n^{|v|}\sigma(u)$

以下では、 $n = 2$ の場合、すなわちバイナリな場合を考える. σ をもとにして、次の関数 $\gamma_2 : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \mathbb{Z}^{3 \times 3}$ を考える：

$$\gamma_2(u, v) \triangleq \begin{pmatrix} 1 & \sigma(v) & \sigma(u) - \sigma(v) \\ 0 & 2^{|v|} & 2^{|u|} - 2^{|v|} \\ 0 & 0 & 2^{|u|} \end{pmatrix}.$$

σ の単射性が遺伝して、 γ_2 も単射である.

また、以下のような準同型性が成立する：

$$\gamma_2(u_1, v_1) \gamma_2(u_2, v_2) = \gamma_2(u_1 u_2, v_1 v_2).$$

これは簡単な計算で確認できる：

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & \sigma(v_1) & \sigma(u_1) - \sigma(v_1) \\ 0 & 2^{|v_1|} & 2^{|u_1|} - 2^{|v_1|} \\ 0 & 0 & 2^{|u_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sigma(v_2) & \sigma(u_2) - \sigma(v_2) \\ 0 & 2^{|v_2|} & 2^{|u_2|} - 2^{|v_2|} \\ 0 & 0 & 2^{|u_2|} \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 1 & \sigma(v_2) + \sigma(v_1)2^{|v_2|} & (\sigma(u_2) - \sigma(v_2)) + (\sigma(v_1)[2^{|u_2|} - 2^{|v_2|}]) + 2^{|u_2|}(\sigma(u_1) - \sigma(v_1)) \\ 0 & 2^{|v_1|}2^{|v_2|} & 2^{|v_1|}(2^{|u_2|} - 2^{|v_2|}) + 2^{|u_2|}(2^{|u_1|} - 2^{|v_1|}) \\ 0 & 0 & 2^{|u_1|}2^{|u_2|} \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 1 & \sigma(v_1v_2) & (\sigma(u_2) - \sigma(v_2)) - 2^{|v_2|}\sigma(v_1) + 2^{|u_2|}\sigma(u_1) \\ 0 & 2^{|v_1v_2|} & 2^{|u_1u_2|} - 2^{|v_1v_2|} \\ 0 & 0 & 2^{|u_1u_2|} \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 1 & \sigma(v_1v_2) & \sigma(u_2) + 2^{|u_2|}\sigma(u_1) - (\sigma(v_2) + 2^{|v_2|}\sigma(v_1)) \\ 0 & 2^{|v_1v_2|} & 2^{|u_1u_2|} - 2^{|v_1v_2|} \\ 0 & 0 & 2^{|u_1u_2|} \end{pmatrix} = \gamma_2(v_1v_2, u_1u_2).
\end{aligned}$$

4 決定不能性の証明

決定不能性を示すために、PCP を用いる。PCP のインスタンス (h, g) が与えられる。ここで、 $h, g: \Sigma \rightarrow \Gamma^*$ とする。

まず初期設定として、次のようにして各 $a \in \Sigma$ について行列 M_a を定義する：

$$M_a \triangleq \gamma_2(h(a), g(a))$$

このようにして作った行列から、行列積で得られる行列：

$$M = M_{a_1} \times M_{a_2} \times \cdots \times M_{a_m}$$

について、 γ_2 の準同型的を用いることで、

$$M_{13} = 0 \text{ (すなわち右上隅が } 0) \iff \sigma(h(a_1)h(a_2)\dots h(a_m)) = \sigma(g(a_1)g(a_2)\dots g(a_m))$$

が成立する。右辺は $\sigma(h(a_1a_2\dots a_m)) = \sigma(g(a_1a_2\dots a_m))$ に等しく、 σ が単調であるから、 $h(a_1a_2\dots a_m) = g(a_1a_2\dots a_m)$ となり、PCP が解を持つことになる。

5 決定不能性の境界

生成元が複数あり 3 次元行列の場合で、決定不能になることが分かった。

- 生成元が 2 つで決定不能になるということが、Halava の定理 6.2 にある。
- 生成元を 1 つ、すなわち単一の正方行列の積についての問題は、「Skolem's Problem」と呼ばれる重要な決定問題である。2 次元行列については決定可能であると分かっているが、3 次元以上の場合でも決定可能になるかどうかは、まだ open である。