

『離散構造』5章(グラフと木)の演習問題 解答例 (海野)

問題 1 (無向グラフ)

無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{1, \dots, 13\}$,
- 頂点 $x \in V$ と $y \in V$ の間に辺があることの必要十分条件は

$$y = 3x \vee y = 3x + 1 \vee y = 3x + 2 \vee x = 3y \vee x = 3y + 1 \vee x = 3y + 2$$

解答準備. グラフ G_1 を図示すると図1のようになる。

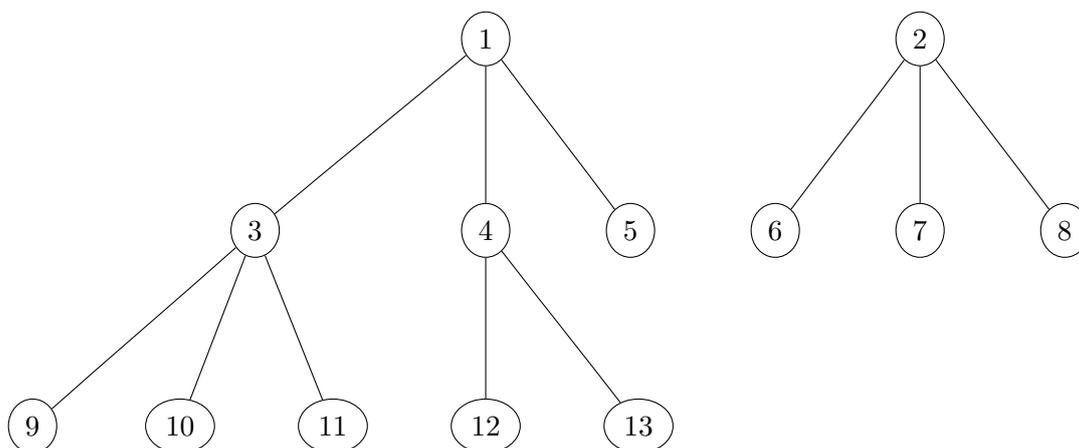


図 1: グラフ G_1

- (a) 頂点 2 と 4 の次数をそれぞれ求めよ。

答. 頂点 2 の次数は 3 である。頂点 4 の次数は 3 である。

- (b) 頂点 5 から 10 への道の中で最短のものを求め、その長さを答えよ。

答. $\langle 5, 1, 3, 10 \rangle$ が最短の道であり、その長さは 3 である。

- (c) グラフ G_1 のサイズ (辺の本数) と位数 (頂点の数) を求めよ。

答. 位数は 13、サイズは 11 である。

- (d) グラフ G_1 の頂点 4 を通る単純道 (同じ辺を通らない道) のうち最長のものを (複数ある場合はすべて) 求めよ。

答. 頂点 4 を通る最長の単純道は長さ 4 であり、以下の 12 個存在する。

- $\langle 9, 3, 1, 4, 12 \rangle$
- $\langle 9, 3, 1, 4, 13 \rangle$

- $\langle 10, 3, 1, 4, 12 \rangle$
- $\langle 10, 3, 1, 4, 13 \rangle$
- $\langle 11, 3, 1, 4, 12 \rangle$
- $\langle 11, 3, 1, 4, 13 \rangle$
- $\langle 12, 4, 1, 3, 9 \rangle$
- $\langle 12, 4, 1, 3, 10 \rangle$
- $\langle 12, 4, 1, 3, 11 \rangle$
- $\langle 13, 4, 1, 3, 9 \rangle$
- $\langle 13, 4, 1, 3, 10 \rangle$
- $\langle 13, 4, 1, 3, 11 \rangle$

(e) グラフ G_1 の連結成分の個数を求めよ。

答. 2 個。

問題 2 (有向グラフ)

有向グラフ G_2 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4\}$,
- 辺の集合 $E = \{ \langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \in V \times V \mid (x_2 - x_1 = 1 \wedge y_1 = y_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_2 - y_1 = 1) \}$.

解答準備. グラフ G_2 を図示すると図 2 のようになる。

(a) 頂点 $\langle 3, 2 \rangle$ と $\langle 5, 3 \rangle$ の出次数と入次数をそれぞれ求めよ。

答. 頂点 $\langle 3, 2 \rangle$ の入次数は 2, 出次数は 2 である。頂点 $\langle 5, 3 \rangle$ の入次数は 2, 出次数は 1 である。

(b) 頂点 $\langle 1, 1 \rangle$ から $\langle 4, 3 \rangle$ への単純道の個数を求めよ。

答. $C(5, 2) = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ である。

(c) グラフ G_2 において最長の単純道の長さを求めよ。

答. $\langle 1, 1 \rangle$ から x 方向に 4, y 方向に 3 進んで $\langle 5, 4 \rangle$ に至る単純道が最長であり、その長さは $4 + 3 = 7$ である。

(d) 頂点 $\langle 3, 3 \rangle$ を通る最長の単純道の個数を求めよ。

答. $C(4, 2) \times C(3, 1) = 6 \times 3 = 18$ 個存在する。

問題 3 (木に関する推論)

(a) 辺が 5 本ある木で異なるもの (同型でないもの) がいくつあるか答えよ。

答. 図 3 に示すように 6 個存在する。

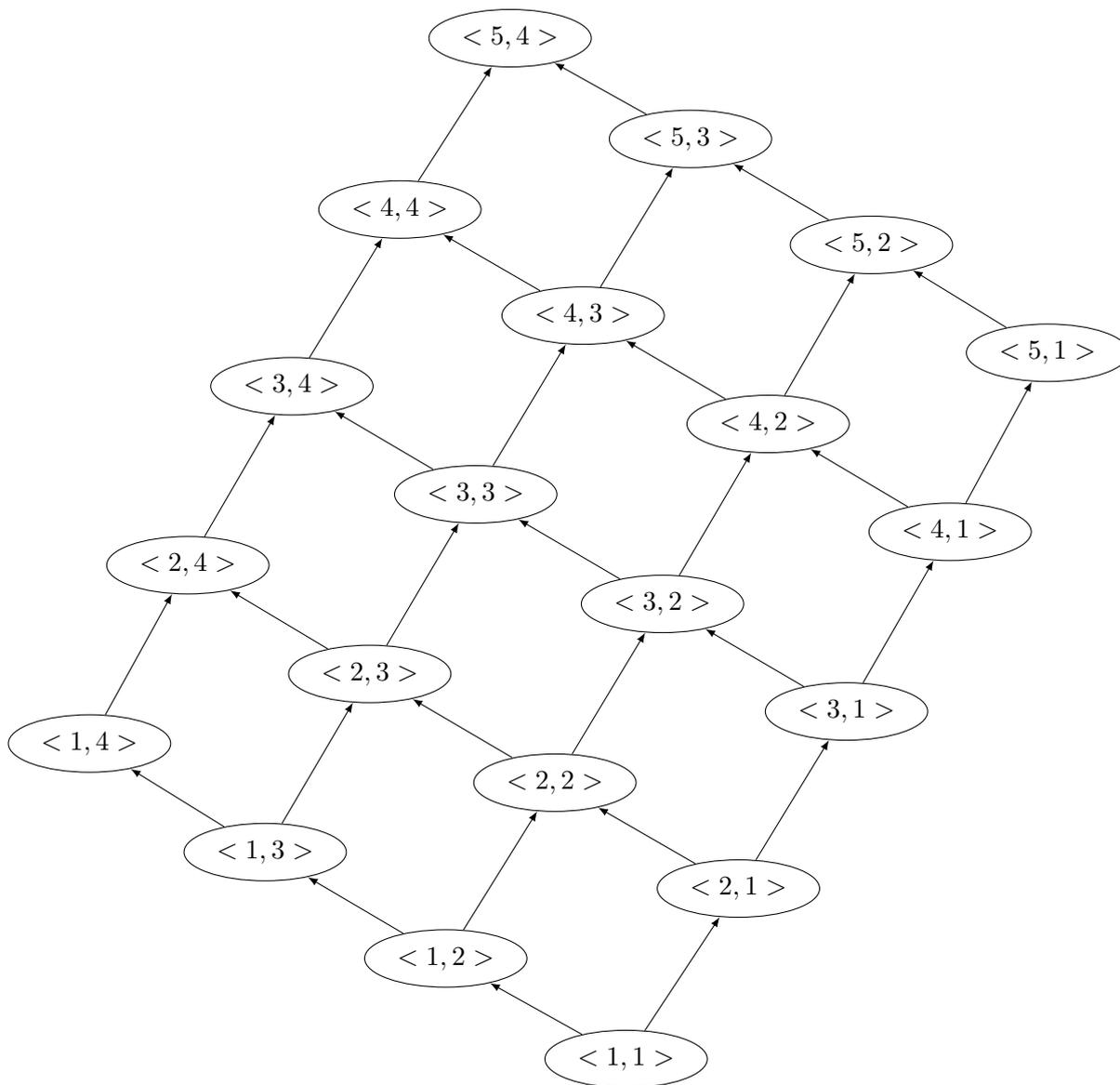


図 2: グラフ G_2

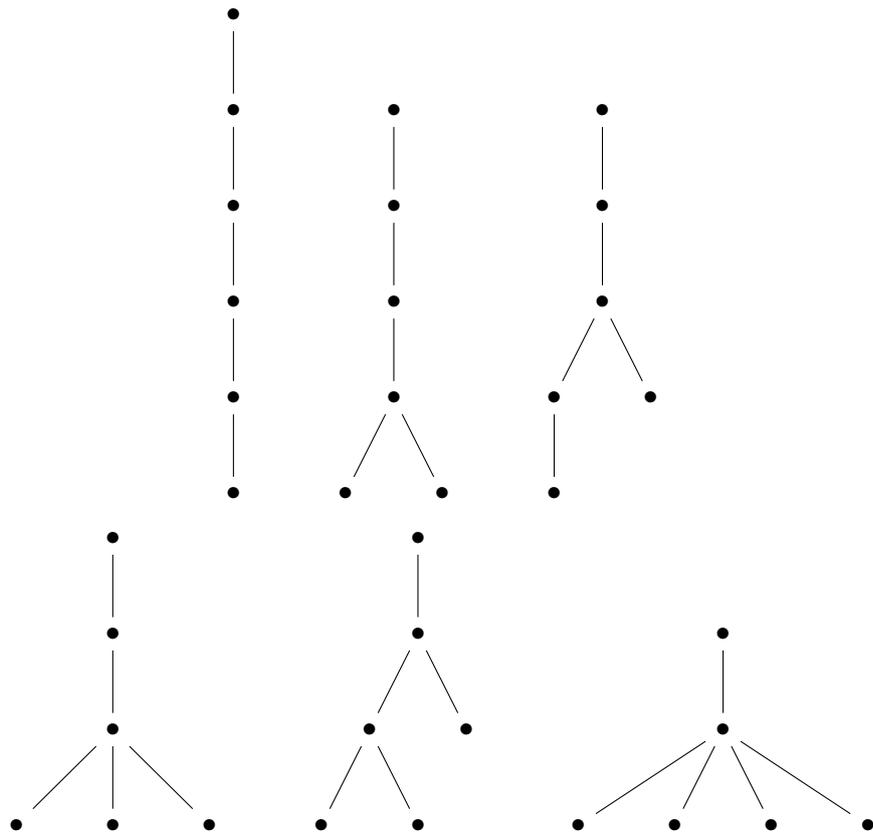


図 3: 辺が 5 本ある同型でない木