「離散構造」補足資料
(亀山幸義)

この文書は、離散構造の授業や演習で説明しきれなかった内容の補足集である。

1 $\forall x \in S.\ A$ という記法について (2014/10/31)

「集合」に関する演習で，$\forall x \in S.\ A$ という記法を説明なしに使ってしまっていた．同様に，$\exists x \in S.\ A$ という記法もある．これらは，以下の論理式の省略形である．

$$\forall x \in S.\ A \text{ は次の論理式の省略: } \forall x.\ (x \in S \Rightarrow A)$$
$$\exists x \in S.\ A \text{ は次の論理式の省略: } \exists x.\ (x \in S \wedge A)$$

これらの省略形の意味は、皆さんが思っている通りである。すなわち、前者は,「集合 S の任意の要素 x に対して A が成立する」ことを意味し，後者は,「集合 S のある要素 x に対して A が成立する」ことを意味する．

$\forall$ のときは $\Rightarrow$ を使い，$\exists$ のときは $\wedge$ を使うところが紛らわしいので注意すること．(使い方を間違えて，$\forall x\ (x \in S \wedge A)$ の略だと思ってしまうと，いつでも成立しない論理式になってしまう．同様に，$\exists x\ (x \in S \Rightarrow A)$ の略だと思ってしまうと，いつでも成立する論理式になってしまう．いずれにしても，無意味な論理式になってしまうのである．)

なお，$\forall x \in S$ や $\exists x \in S$ と書いた人がいた (これらの式のあとに論理式を書かない人がいた)．気持ちはよくわかるが，これでは論理式になっていないので，避けてほしい書き方である．

2 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ と $\mathcal{N}$ の間の全単射 (2014/10/31)

「関数」の講義の際に，上記の全単射の話をしたが，説明が十分できなかったので，ここで補足を書いておく．

$f : (\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \to \mathcal{N}$ となる全単射は，いろいろ存在するが，一番標準的なものは，以下の関数である．

$$f(\langle x, y\rangle) = (x + y)(x + y + 1)/2 + y$$

奇妙な形に見えるかもしれないが，これは，$\langle x, y\rangle$ を平面に並べたときに，以下のように順番に数え上げる (枚挙する) ならべかたである．

x \ y	0	1	2	$\cdots$
0	0	2	5	$\cdots$
1	1	4	8	$\cdots$
2	3	7	12	$\cdots$
3	6	11	17	$\cdots$
$\cdots$				

左上から始まり，$x + y = 0$ の要素を全て (y が小さい方から) 取り，それがおわると $x + y = 1$, $x + y = 2, \cdots, x + y = k, \cdots$ という具合いに，k を 1 つずつ大きくして，取っていくものである．

たとえば，$\langle 3,1\rangle$ は $3+1=4$ なので，$k=4$ である．$k=1,2,3$ の要素数は，$1+2+3=6$ 個であり，$\langle 3,1\rangle$ は $k=4$ の中では 2 番目 ($y+1$ 番目) の要素であるので，8 番目に数えあげられる．この数え上げは，0 からはじめたので，8 番目の要素には 7 という数が対応する．

この観察により、$f(\langle x,y\rangle)=1+2+\cdots+(x+y)+y$ と定めると、f は全単射になる．この式の $\cdots$ のところをきちんとした式で書きなおしたものが，上記の式である．

f の逆関数 f^{-1} も全単射であり、$f^{-1}(0),f^{-1}(1),f^{-1}(2),f^{-1}(3),\cdots$ を考えると、これは、(全単射であるので当然)$\langle x,y\rangle$ の形の要素が全て 1 回ずつ現れる無限列となる。すなわち、f^{-1} は、「自然数の対 $\langle x,y\rangle$ の形になる全ての要素をちょうど 1 回ずつ順番に生成する関数」である。

こういった「すべての X を生成する関数」(数え挙げ関数) は，アルゴリズムの設計で有用なことが多い．(X の例は「木」や,「自然数のリストの並べかえ」などがくる．)