

『離散構造』6章(帰納)の演習問題

出題: 2014 年 12 月 12 日

期限: 2014 年 12 月 19 日の授業

問題 1 (集合の帰納的定義)

- (a) 自然数のリストで奇数と偶数が交互に要素として現れるものの集合を帰納的に定義しなさい。
- (b) 文字集合 $\{0, 1\}$ 上の文字列で回文になっているものの集合 S を帰納的に定義せよ。回文とは 0100110010 のように左から読んでも右から読んでも同じ文字列である。

問題 2 (関数の帰納的定義)

文字集合 $\Sigma = \{[,], \oplus, \otimes, X, 0, 1\}$ 上の文字列で、算術式を表すものの集合 E を次の帰納的定義により定める。

- $X \in E$
- $0 \in E$
- $1 \in E$
- $e_1, e_2 \in E$ ならば $[e_1 \oplus e_2] \in E$
- $e_1, e_2 \in E$ ならば $[e_1 \otimes e_2] \in E$

このように定義された算術式に対して関数 $f : E \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ と $g : E \rightarrow E$ を次のように帰納的に定める。

$$f(e, n) = \begin{cases} n & (\text{if } e = X) \\ 0 & (\text{if } e = 0) \\ 1 & (\text{if } e = 1) \\ f(e_1, n) + f(e_2, n) & (\text{if } e = [e_1 \oplus e_2]) \\ f(e_1, n) \times f(e_2, n) & (\text{if } e = [e_1 \otimes e_2]) \end{cases} \quad g(e) = \begin{cases} [X \oplus X] & (\text{if } e = X) \\ 0 & (\text{if } e = 0) \\ [1 \oplus 1] & (\text{if } e = 1) \\ [g(e_1) \oplus g(e_2)] & (\text{if } e = [e_1 \oplus e_2]) \\ [g(e_1) \otimes e_2] & (\text{if } e = [e_1 \otimes e_2]) \end{cases}$$

これに対して、以下の問に答えよ。

- (a) $f([([1 \otimes X] \oplus 1), 41)$ の値を求めよ。
- (b) $f([([1 \oplus 1] \otimes [0 \oplus X]), 21)$ の値を求めよ。
- (c) $g([([1 \otimes X] \oplus 1))$ の値を求めよ。
- (d) $g([1 \otimes [0 \oplus X]])$ の値を求めよ。
- (e) 任意の算術式 $e \in E$ と自然数 $n \in \mathcal{N}$ について $2 \times f(e, n) = f(g(e), n)$ であることを証明しなさい。
- (f) 任意の算術式 $e \in E$ と自然数 $n \in \mathcal{N}$ について $2 \times f(e, n) = f([e \oplus e], n)$ であることを証明しなさい。