

『離散構造』6章(帰納)の演習問題 解答例 (海野)

問題 1 (集合の帰納的定義)

(a) 自然数のリストで奇数と偶数が交互に要素として現れるものの集合を帰納的に定義しなさい。

答. そのような集合 X は以下を満たす最小の集合として帰納的に定義される。

- $\langle \rangle \in X$
- $\forall n(\langle n \rangle \in X)$
- $\forall n, L(n \in \mathcal{N} \wedge L \in X \wedge n \bmod 2 \neq \text{head}(L) \bmod 2 \Rightarrow \text{cons}(n, L) \in X)$

(b) 文字集合 $\{0, 1\}$ 上の文字列で回文になっているものの集合 S を帰納的に定義せよ。回文とは 0100110010 のように左から読んでも右から読んでも同じ文字列である。

答. S は以下を満たす最小の集合として帰納的に定義される。

- $\Lambda \in S$
- $0 \in S$
- $1 \in S$
- $\forall s(s \in S \Rightarrow 0s0 \in S)$
- $\forall s(s \in S \Rightarrow 1s1 \in S)$

問題 2 (関数の帰納的定義)

文字集合 $\Sigma = \{[,], \oplus, \otimes, X, 0, 1\}$ 上の文字列で、算術式を表すものの集合 E を次の帰納的定義により定める。

- $X \in E$
- $0 \in E$
- $1 \in E$
- $e_1, e_2 \in E$ ならば $[e_1 \oplus e_2] \in E$
- $e_1, e_2 \in E$ ならば $[e_1 \otimes e_2] \in E$

このように定義された算術式に対して関数 $f : E \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ と $g : E \rightarrow E$ を次のように帰納的に定める。

$$f(e, n) = \begin{cases} n & (\text{if } e = X) \\ 0 & (\text{if } e = 0) \\ 1 & (\text{if } e = 1) \\ f(e_1, n) + f(e_2, n) & (\text{if } e = [e_1 \oplus e_2]) \\ f(e_1, n) \times f(e_2, n) & (\text{if } e = [e_1 \otimes e_2]) \end{cases} \quad g(e) = \begin{cases} [X \oplus X] & (\text{if } e = X) \\ 0 & (\text{if } e = 0) \\ [1 \oplus 1] & (\text{if } e = 1) \\ [g(e_1) \oplus g(e_2)] & (\text{if } e = [e_1 \oplus e_2]) \\ [g(e_1) \otimes e_2] & (\text{if } e = [e_1 \otimes e_2]) \end{cases}$$

これに対して、以下の問に答えよ。

(a) $f([1 \otimes X] \oplus 1, 41)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{aligned} f([1 \otimes X] \oplus 1, 41) &= f([1 \otimes X], 41) + f(1, 41) && (\text{fの定義による}) \\ &= (f(1, 41) \times f(X, 41)) + f(1, 41) && (\text{fの定義による}) \\ &= (1 \times 41) + 1 && (\text{fの定義による}) \\ &= 42 \end{aligned}$$

(b) $f([1 \oplus 1] \otimes [0 \oplus X], 21)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{aligned} f([1 \oplus 1] \otimes [0 \oplus X], 21) &= f([1 \oplus 1], 21) \times f([0 \oplus X], 21) && (\text{fの定義による}) \\ &= (f(1, 21) + f(1, 21)) \times (f(0, 21) + f(X, 21)) && (\text{fの定義による}) \\ &= (1 + 1) \times (0 + 21) && (\text{fの定義による}) \\ &= 42 \end{aligned}$$

(c) $g([1 \otimes X] \oplus 1)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{aligned} g([1 \otimes X] \oplus 1) &= [g([1 \otimes X]) \oplus g(1)] && (\text{gの定義による}) \\ &= [[g(1) \otimes X] \oplus g(1)] && (\text{gの定義による}) \\ &= [[[1 \oplus 1] \otimes X] \oplus [1 \oplus 1]] && (\text{gの定義による}) \end{aligned}$$

(d) $g([1 \otimes [0 \oplus X]])$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{aligned} g([1 \otimes [0 \oplus X]]) &= [g(1) \otimes [0 \oplus X]] && (\text{gの定義による}) \\ &= [[1 \oplus 1] \otimes [0 \oplus X]] && (\text{gの定義による}) \end{aligned}$$

(e) 任意の算術式 $e \in E$ と自然数 $n \in \mathcal{N}$ について $2 \times f(e, n) = f(g(e), n)$ であることを証明しなさい。

答. 論理式 e に関する帰納法で証明する。

• case $e = X$:

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = 2 \times f(X, n) &= 2 \times n && (\text{fの定義による}) \\ &= f(X, n) + f(X, n) && (\text{fの定義による}) \\ &= f([X \oplus X], n) && (\text{fの定義による}) \\ &= f(g(X), n) && (\text{gの定義による}) \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

• case $e = 0$:

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = 2 \times f(0, n) &= 2 \times 0 && (\text{fの定義による}) \\ &= f(0, n) && (\text{fの定義による}) \\ &= f(g(0), n) && (\text{gの定義による}) \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

• case $e = 1$:

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = 2 \times f(1, n) &= 2 \times 1 && (\text{fの定義による}) \\ &= f(1, n) + f(1, n) && (\text{fの定義による}) \\ &= f([1 \oplus 1], n) && (\text{fの定義による}) \\ &= f(g(1), n) && (\text{gの定義による}) \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

- case $e = [e_1 \oplus e_2]$: 帰納法の仮定より、 $2 \times f(e_1, n) = f(g(e_1), n)$ かつ $2 \times f(e_2, n) = f(g(e_2), n)$ である。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) = 2 \times f([e_1 \oplus e_2], n) &= 2 \times f(e_1, n) + 2 \times f(e_2, n) && (\text{fの定義による}) \\
&= f(g(e_1), n) + f(g(e_2), n) && (\text{帰納法の仮定による}) \\
&= f([g(e_1) \oplus g(e_2)], n) && (\text{fの定義による}) \\
&= f(g([e_1 \oplus e_2]), n) && (\text{gの定義による}) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

- case $e = [e_1 \otimes e_2]$: 帰納法の仮定より、 $2 \times f(e_1, n) = f(g(e_1), n)$ かつ $2 \times f(e_2, n) = f(g(e_2), n)$ である。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) = 2 \times f([e_1 \otimes e_2], n) &= 2 \times f(e_1, n) \times f(e_2, n) && (\text{fの定義による}) \\
&= f(g(e_1), n) \times f(g(e_2), n) && (\text{帰納法の仮定による}) \\
&= f([g(e_1) \otimes g(e_2)], n) && (\text{fの定義による}) \\
&= f(g([e_1 \otimes e_2]), n) && (\text{gの定義による}) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

(f) 任意の算術式 $e \in E$ と自然数 $n \in \mathcal{N}$ について $2 \times f(e, n) = f([e \oplus e], n)$ であることを証明しなさい。

答.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) = 2 \times f(e, n) &= f(e, n) + f(e, n) && (\text{fの定義による}) \\
&= f([e \oplus e], n) && (\text{fの定義による}) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$