

『離散構造』 6章の例題

亀山

問 1 (集合の帰納的定義) $\{L, R, 0, 1, +\}$ 上の文字列を考える. ただし, L は左括弧 “(“ をあらわし, R は右括弧 “)” を表す. この文字列の集合 D を, 以下のように帰納的に定義する.

(D1) $0 \in D$.

(D2) $1 \in D$.

(D3) $s \in D \Rightarrow LsR \in D$.

(D4) $s \in D \wedge t \in D \Rightarrow s + t \in D$.

- (a) 文字列 $0+1+0$ が, 集合 D の要素であることを示してみよう. まず, (D1) より $0 \in D$ である. また, (D2) より $1 \in D$ である. これらと, (D4) より, $0+1 \in D$ である. さらに, (D4) を使って, $0+1+0 \in D$ である.
- (b) 文字列 $0+1+0$ が集合 D の要素であることを示す方法は, 上記の手順以外にもある. それを示せ. (このように2通り以上の方法で同じ文字列が導出できるとき, 曖昧な文法であるという.)
- (c) 文字列 $LL1RR$ が, 集合 D の要素であるかどうか, 理由をつけて示せ.
- (d) 文字列 $L0RR + LL1R$ が, 集合 D の要素であるかどうか, 理由をつけて示せ.
- (e) この文法を曖昧でないものにする (D に属するどの文字列も, 唯一つの方法で導けるようにする) には, D の定義をどう変更したらよいか?

問 2 (関数の帰納的定義) リストを反転する関数 $\text{reverse}: \text{List}_A \rightarrow \text{List}_A$ の定義を与えよ. たとえば, $\text{reverse}(\langle 1, 2, 3 \rangle) = \langle 3, 2, 1 \rangle$ となる.

問 3 (リストに関する帰納法) 任意のリスト x, y, z に対して,

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

が成立することを x に関する帰納法を用いて証明せよ. ただし, $\oplus$ はリストを連結する関数である.