

『離散構造』5章(グラフと木)の演習問題 解答例 (海野)

問題 1 (無向グラフ)

無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{0, 1, \dots, 20\}$,
- 頂点 $x \in V$ と $y \in V$ の間に辺があることの必要十分条件は

$$x \bmod 7 = y \bmod 7 \text{ または } x, y \text{ がともに素数}$$

解答準備. グラフ G_1 を図示すると図1のようになる。

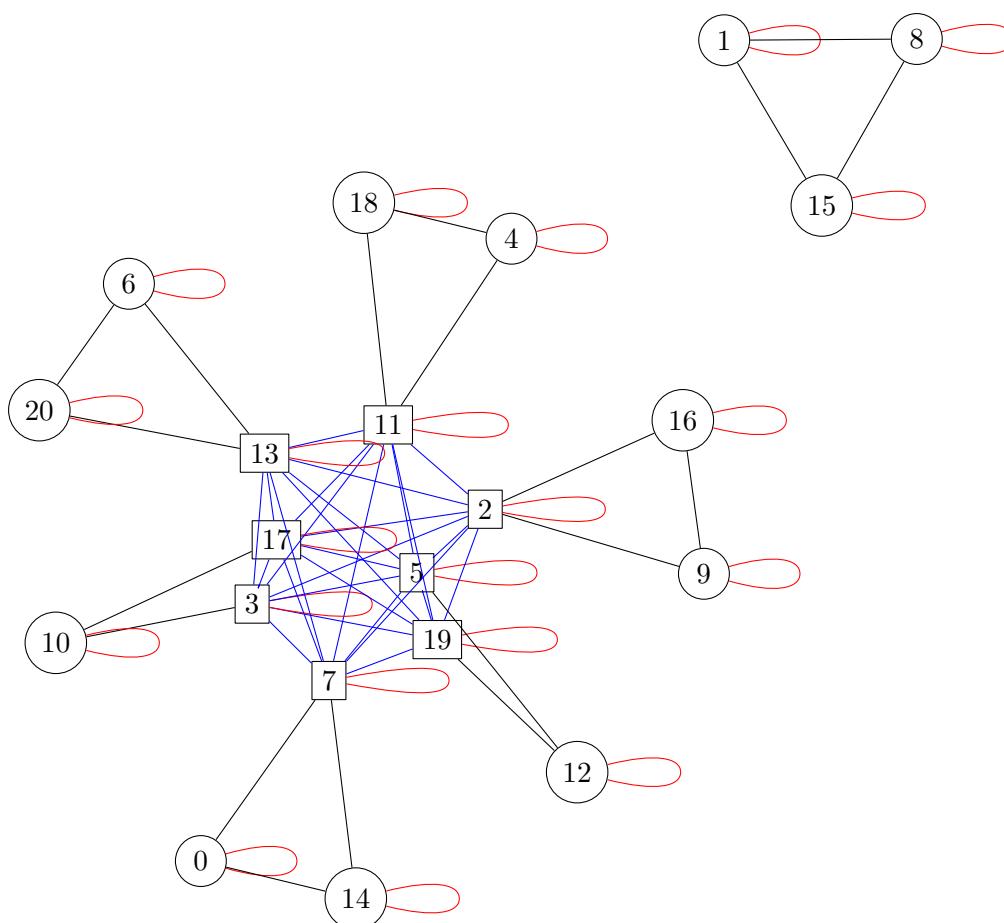


図 1: グラフ G_1

(a) 頂点 7 と 8 の次数をそれぞれ求めよ。

答. 7 以外で $x \bmod 7 = 0$ となる x は 0, 14 である。また、7 以外の素数は 2, 3, 5, 11, 13, 17, 19 の 7 個存在する。したがって、頂点 7 の次数は $2 + 2 + 7 = 11$ である。ここで、7 から 7 への自己ループ辺は、次数を数える際に 2 回カウントすることに注意。頂点 8 の次数は $2 + 2 = 4$ である。

(b) 頂点 0 から 20 への道があるか調べ、ある場合はそのような道の中で最短のものを求めよ。

答. $\langle 0, 7, 13, 20 \rangle$ が最短の道である。

(c) グラフ G_1 のサイズ（辺の本数）と位数（頂点の数）を求めよ。

答. 位数は 21 である。7 で割った余りが等しくなる頂点同士を結ぶ辺は、 $(3+3) \times 7 = 42$ 本存在する。20 以下の素数の数は 8 個なので、異なる素数同士を結ぶ辺は $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ 本存在する。ただし、異なる素数同士で 7 で割った余りが等しくなるような組み合わせとして、 $\{3, 17\}$ と $\{5, 19\}$ が存在するので、それらを重複して数えないように注意すると、全体の辺の本数は $42 + 28 - 2 = 68$ 本である。

(d) グラフ G_1 の閉路のうち、頂点 8 を含み、単純道（同じ辺を通らない道）であるもののうち、最長のものを求めよ。

答. 頂点 8 を含む連結成分の辺の本数は 6 であり、その一筆書き $\langle 8, 8, 1, 1, 15, 15, 8 \rangle$ が最長の道である。長さ 6 の単純道はこれ以外にも存在し、それらを答えても正解である。

(e) グラフ G_1 の連結成分の個数を求めよ。

答. 頂点 8 を含む連結成分と頂点 7 を含む連結成分の 2 つである。

問題 2 (有向グラフ)

有向グラフ G_2 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{1, 2, \dots, 12\}$,
- 辺の集合 $E = \{ \langle x, y \rangle \in V \times V \mid x \text{ は } y \text{ の約数} \wedge x \neq y \}$.

解答準備. グラフ G_2 を図示すると図 2 のようになる。

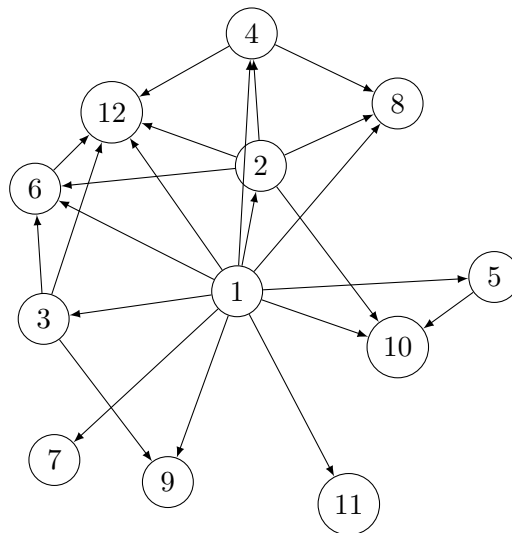


図 2: グラフ G_2

(a) 頂点 5 と 6 の出次数と入次数をそれぞれ求めよ。

答. 頂点 5 の入次数は 1, 出次数は 1 である。頂点 6 の入次数は 3, 出次数は 1 である。

(b) 頂点 1 から 12 への単純道の個数を求めよ。

答. 頂点 1 から 12 への単純道は以下の 8 個存在する。

1. $\langle 1, 2, 4, 12 \rangle$

2. $\langle 1, 2, 6, 12 \rangle$
3. $\langle 1, 2, 12 \rangle$
4. $\langle 1, 3, 6, 12 \rangle$
5. $\langle 1, 3, 12 \rangle$
6. $\langle 1, 4, 12 \rangle$
7. $\langle 1, 6, 12 \rangle$
8. $\langle 1, 12 \rangle$

(c) グラフ G_2 において最長の単純道の長さを求めよ。

答. $\langle 1, 2, 4, 12 \rangle$, $\langle 1, 2, 6, 12 \rangle$, $\langle 1, 3, 6, 12 \rangle$ が最長の単純道であり、その長さは 3 である。

問題 3 (木に関する推論)

(a) 高さ 2 の 2 分木で異なるもの (同型でないもの) がいくつあるか答えよ。

答. 図 3 に示すように 7 個存在する。

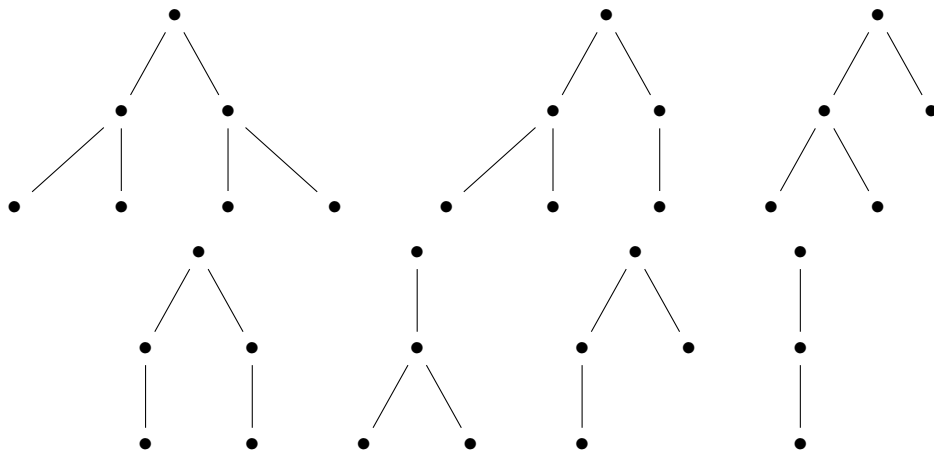


図 3: 高さ 2 の同型でない 2 分木