

『離散構造』4章(関係)の演習問題

出題: 2014 年 11 月 14 日

期限: 2014 年 11 月 21 日の授業

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。 $\mathcal{N}_{10}$ 上の 2 項関係 R, S, T, E, D を以下のように定める。

$$xRy \Leftrightarrow y \bmod 3 = (x+1) \bmod 3$$

$$xSy \Leftrightarrow 2y \geq 7x$$

$$xTy \Leftrightarrow 7y \geq 2x$$

$$mEc \Leftrightarrow c = m^3 \bmod 10$$

$$cDm \Leftrightarrow m = c^7 \bmod 10$$

問題 1 (関係の性質)

- (a) R が反射的、対称的、推移的、反対称的、半順序、同値関係であるかをそれぞれ答えよ。反例がある場合はそれも示すこと。
- (b) S について同様のことを答えよ。
- (c) T について同様のことを答えよ。
- (d) E について同様のことを答えよ。
- (e) D について同様のことを答えよ。

問題 2 (関係の合成)

- (a) $R \circ R$ の要素をすべて書き下しなさい。
- (b) $R \circ R \circ R$ の要素をすべて書き下しなさい。
- (c) $E \circ D$ の要素をすべて書き下しなさい。
- (d) $D \circ E$ の要素をすべて書き下しなさい。

問題 3 (閉包)

- (a) $\mathcal{N}_{10}$ 上の 2 項関係で、 S を包含し反射的である関係のうち、集合の要素数が最小のものを求めよ。また、その関係が半順序であるかどうか答えよ。
- (b) $\mathcal{N}_{10}$ 上の 2 項関係で、 T を包含し推移的である関係のうち、集合の要素数が最小のものを求めよ。また、その関係が同値関係であるかどうか答えよ。