

『離散構造』4章(関係)の演習問題 解答例 (海野)

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。 $\mathcal{N}_{10}$ 上の2項関係 R, S, T, E, D を以下のように定める。

$$xRy \Leftrightarrow y \bmod 3 = (x+1) \bmod 3$$

$$xSy \Leftrightarrow 2y \geq 7x$$

$$xTy \Leftrightarrow 7y \geq 2x$$

$$mEc \Leftrightarrow c = m^3 \bmod 10$$

$$cDm \Leftrightarrow m = c^7 \bmod 10$$

問題 1 (関係の性質)

- (a) R が反射的、対称的、推移的、反対称的、半順序、同値関係であることをそれぞれ答えよ。反例がある場合はそれも示すこと。

答. $0R0$ でないので R は反射的でない。 $0R1$ だが $1R0$ ではないので R は対称的でない。 $0R1$ かつ $1R2$ だが $0R2$ ではないので R は推移的でない。 xRy かつ yRx となる $x, y \in \mathcal{N}_{10}$ は存在しないので R は反対称的である。以上より、半順序でも同値関係でもない。参考のために R の要素をすべて書き下すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} R &= (\{0, 3, 6, 9\} \times \{1, 4, 7\}) \cup (\{1, 4, 7\} \times \{2, 5, 8\}) \cup (\{2, 5, 8\} \times \{0, 3, 6, 9\}) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 0, 7 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 8 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 9 \rangle, \\ \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 5, 0 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \langle 5, 9 \rangle, \\ \langle 6, 1 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 6, 7 \rangle, \langle 7, 2 \rangle, \langle 7, 5 \rangle, \langle 7, 8 \rangle, \langle 8, 0 \rangle, \langle 8, 3 \rangle, \langle 8, 6 \rangle, \langle 8, 9 \rangle, \\ \langle 9, 1 \rangle, \langle 9, 4 \rangle, \langle 9, 7 \rangle \end{array} \right\} \end{aligned}$$

- (b) S について同様のことを答えよ。

答. $1S1$ でないので S は反射的でない。 $0S1$ だが $1S0$ ではないので S は対称的でない。 S は推移的である。なぜなら xSy かつ ySz と仮定すると $2y \geq 7x$ かつ $2z \geq 7y$ が成り立ち、 $2z \geq 7y \geq \frac{49}{2}x \geq 7x$ 、つまり xSz も成り立つからである。 xSy かつ ySx とすると $x = y = 0$ なので S は反対称的である。以上より、半順序でも同値関係でもない。参考のために S の要素をすべて書き下すと以下ようになる。

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 0, 5 \rangle, \langle 0, 6 \rangle, \langle 0, 7 \rangle, \langle 0, 8 \rangle, \langle 0, 9 \rangle, \\ \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 1, 8 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 2, 7 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 2, 9 \rangle \end{array} \right\}$$

- (c) T について同様のことを答えよ。

答. すべての $x \in \mathcal{N}_{10}$ について、 $7x \geq 2x$ なので T は反射的である。 $1T4$ だが $4T1$ ではないので T は対称的でない。 $4T2$ かつ $2T1$ だが $4T1$ ではないので T は推移的でない。 $2T1$ かつ $1T2$ だが

$2 \neq 1$ なので T は反対称的でない。以上より、半順序でも同値関係でもない。参考のために T の要素をすべて書き下すと以下のようになる。

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \langle 0, 0 \rangle, \dots, \langle 0, 9 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \dots, \langle 1, 9 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \dots, \langle 2, 9 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \dots, \langle 3, 9 \rangle, \\ \langle 4, 2 \rangle, \dots, \langle 4, 9 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \dots, \langle 5, 9 \rangle, \langle 6, 2 \rangle, \dots, \langle 6, 9 \rangle, \langle 7, 2 \rangle, \dots, \langle 7, 9 \rangle, \\ \langle 8, 3 \rangle, \dots, \langle 8, 9 \rangle, \langle 9, 3 \rangle, \dots, \langle 9, 9 \rangle \end{array} \right\}$$

(d) E について同様のことを答えよ。

答. $2 E 2$ でないので E は反射的でない。すべての $x, y \in \mathcal{N}_{10}$ について、 xEy ならば yEx なので E は対称的である。 $2 E 8$ かつ $8 E 2$ だが $2 E 2$ ではないので E は推移的でない。 $2 E 8$ かつ $8 E 2$ だが $2 \neq 8$ なので E は反対称的でない。以上より、半順序でも同値関係でもない。参考のために E の要素をすべて書き下すと以下のようになる。

$$E = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 3 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 9, 9 \rangle \}$$

(e) D について同様のことを答えよ。

答. $2 D 2$ でないので D は反射的でない。すべての $x, y \in \mathcal{N}_{10}$ について、 xDy ならば yDx なので D は対称的である。 $2 D 8$ かつ $8 D 2$ だが $2 D 2$ ではないので D は推移的でない。 $2 D 8$ かつ $8 D 2$ だが $2 \neq 8$ なので D は反対称的でない。以上より、半順序でも同値関係でもない。参考のために D の要素をすべて書き下すと以下のようになる。

$$D = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 3 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 9, 9 \rangle \}$$

	反射的	対称的	推移的	反対称的	半順序	同値関係
R				✓		
S			✓	✓		
T	✓					
E		✓				
D		✓				

問題 2 (関係の合成)

(a) $R \circ R$ の要素をすべて書き下しなさい。

答. $R \circ R$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z (x R z \wedge z R y) \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z (z \bmod 3 = (x+1) \bmod 3 \wedge y \bmod 3 = (z+1) \bmod 3) \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid y \bmod 3 = (x+2) \bmod 3 \} \\ &= (\{0, 3, 6, 9\} \times \{2, 5, 8\}) \cup (\{1, 4, 7\} \times \{0, 3, 6, 9\}) \cup (\{2, 5, 8\} \times \{1, 4, 7\}) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 5 \rangle, \langle 0, 8 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 7 \rangle, \\ \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 8 \rangle, \langle 4, 0 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 4, 9 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 5, 7 \rangle, \\ \langle 6, 2 \rangle, \langle 6, 5 \rangle, \langle 6, 8 \rangle, \langle 7, 0 \rangle, \langle 7, 3 \rangle, \langle 7, 6 \rangle, \langle 7, 9 \rangle, \langle 8, 1 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 8, 7 \rangle, \\ \langle 9, 2 \rangle, \langle 9, 5 \rangle, \langle 9, 8 \rangle \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(b) $R \circ R \circ R$ の要素をすべて書き下しなさい。

答. $R \circ R \circ R$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
R \circ R \circ R &= \{\langle x, y \rangle \mid \exists z (x (R \circ R) z \wedge z R y)\} \\
&= \{\langle x, y \rangle \mid \exists z (z \bmod 3 = (x + 2) \bmod 3 \wedge y \bmod 3 = (z + 1) \bmod 3)\} \\
&= \{\langle x, y \rangle \mid y \bmod 3 = x \bmod 3\} \\
&= (\{0, 3, 6, 9\} \times \{0, 3, 6, 9\}) \cup (\{1, 4, 7\} \times \{1, 4, 7\}) \cup (\{2, 5, 8\} \times \{2, 5, 8\}) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 0, 6 \rangle, \langle 0, 9 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \\ \langle 3, 0 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 8 \rangle, \\ \langle 6, 0 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 9 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 8, 5 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \\ \langle 9, 0 \rangle, \langle 9, 3 \rangle, \langle 9, 6 \rangle, \langle 9, 9 \rangle \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

(c) $E \circ D$ の要素をすべて書き下しなさい。

答. $E \circ D$ は以下ようになる。

$$E \circ D = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 9, 9 \rangle\}$$

(d) $D \circ E$ の要素をすべて書き下しなさい。

答. $D \circ E$ は以下ようになる。

$$D \circ E = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 9, 9 \rangle\}$$

問題 3 (閉包)

(a) $\mathcal{N}_{10}$ 上の 2 項関係で、 S を包含し反射的である関係のうち、集合の要素数が最小のものを求めよ。また、その関係が半順序であるかどうか答えよ。

答. この問題は発展問題であった。題意を満たす関係を S の反射閉包といい、 $S^=$ などと表記される。 $S^=$ は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
S^= &= S \cup \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathcal{N}_{10}\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 0, 5 \rangle, \langle 0, 6 \rangle, \langle 0, 7 \rangle, \langle 0, 8 \rangle, \langle 0, 9 \rangle, \\ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 1, 8 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 7 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 2, 9 \rangle, \\ \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 9, 9 \rangle \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$S^=$ は反射的、推移的、反対称的なので半順序である。

(b) $\mathcal{N}_{10}$ 上の 2 項関係で、 T を包含し推移的である関係のうち、集合の要素数が最小のものを求めよ。また、その関係が同値関係であるかどうか答えよ。

答. この問題は発展問題であった。題意を満たす関係を T の推移閉包といい、 T^+ などと表記される。 T^+ は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
T^+ &= \bigcup_{i \geq 1} T^i = T \cup T^2 \cup \dots \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \langle 0, 0 \rangle, \dots, \langle 0, 9 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \dots, \langle 1, 9 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \dots, \langle 2, 9 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \dots, \langle 3, 9 \rangle, \\ \langle 4, 1 \rangle, \dots, \langle 4, 9 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \dots, \langle 5, 9 \rangle, \langle 6, 1 \rangle, \dots, \langle 6, 9 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \dots, \langle 7, 9 \rangle, \\ \langle 8, 1 \rangle, \dots, \langle 8, 9 \rangle, \langle 9, 1 \rangle, \dots, \langle 9, 9 \rangle \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

直感的には、 $x T y$ かつ $y T z$ だが $x T z$ でない $\langle x, z \rangle$ を、そのような $\langle x, z \rangle$ が存在しなくなる、つまり推移的になるまで T に繰り返し追加している。ここでは、 $\langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 6, 1 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 8, 1 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 9, 1 \rangle, \langle 9, 2 \rangle$ が T に追加されている。 T^+ は反射的かつ推移的だが対称的ではない（例えば $0 T^+ 1$ だが $1 T^+ 0$ でない）ので同値関係ではない。