

『離散構造』 4章の例題 の解答例

例題 1 (関係の性質)

ある瞬間に日本にいる人間からなる集合を H とする。 H 上の二項関係として次のものを考えたとき、それぞれが、反射律、対称律、推移律、反対称律を満たすかどうか、理由をつけて答えよ。また、順序、同値関係であるかどうか答えよ。

- $(aR_1b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ の親である})$
- $(aR_2b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ の祖先であるか同一人物である})$
- $(aR_3b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ と夫婦である})$
- $(aR_4b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ と同じ都道府県に住んでいる})$
- $(aR_5b) \Leftrightarrow (a \text{ と } b \text{ は別人である})$

(解答例)

関係	反射律	対称律	推移律	反対称律	順序	同値関係
R_1	no	no	no	yes	no	no
R_2	yes	no	yes	yes	yes	no
R_3	no	yes	no	no	no	no
R_4	yes	yes	yes	no	no	yes
R_5	no	yes	no	no	no	no

(補足) R_1 が反対称律を満たすのは意外かもしれない。 xR_1y と yR_1x が両方とも成立することはないので (どちらかは必ず偽なので)、 $\lceil ((xR_1y) \wedge (yR_1x)) \Rightarrow X \rceil$ という形の論理式は X が何であろうと真である。

例題 2 (関係の合成)

$A = \{ \text{野球部、テニス部、サッカー部} \}$, $B = \{ \text{伊藤、田中、佐藤、太田、福田、森} \}$, $C = \{ \text{茨城、群馬、宮城、東京} \}$ とする。

A, B 上の二項関係 R を「 $aRb \Leftrightarrow b$ は a のメンバである」と定め、 B, C 上の二項関係 S を「 $bSc \Leftrightarrow b$ は c 出身である」と定める。ただし、各クラブのメンバーと、各学生の出身地は下記の表で与えられる。

		伊藤	茨城
		田中	群馬
		佐藤	群馬
		太田	宮城
		福田	茨城
		森	東京
野球部	伊藤、田中、佐藤		
テニス部	佐藤、太田		
サッカー部	佐藤、森、田中		

- 以下のように定められる A, B, C 上の三項関係 T を求めよ。

$$\langle x, y, z \rangle \in T \Leftrightarrow ((xRy) \wedge (ySz))$$

- R と S の合成関係 $R \circ S$ を求めよ。これはどういう集合上の二項関係か？

(解答例) $T = \{ \langle \text{野球部, 伊藤, 茨城} \rangle, \langle \text{野球部, 田中, 群馬} \rangle, \langle \text{野球部, 佐藤, 群馬} \rangle, \langle \text{テニス部, 伊藤, 茨城} \rangle, \langle \text{テニス部, 太田, 宮城} \rangle, \langle \text{サッカー部, 佐藤, 群馬} \rangle, \langle \text{サッカー部, 森, 東京} \rangle, \langle \text{サッカー部, 田中, 群馬} \rangle \}$

$R \circ S = \{ \langle \text{野球部, 茨城} \rangle, \langle \text{野球部, 群馬} \rangle, \langle \text{テニス部, 茨城} \rangle, \langle \text{テニス部, 宮城} \rangle, \langle \text{サッカー部, 東京} \rangle, \langle \text{サッカー部, 群馬} \rangle \}$

(補足) 上記の 3 項関係 T から、 $R \circ S$ を作るのは、容易である。