

『離散構造』 3章演習問題 (亀山)

この問題では、 $\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。 $(\mathcal{N}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\})$ である。 $n \notin \mathcal{N}_n$ であることに注意せよ。)

問 1 (関数の個数) $f^{m,n} : \mathcal{N}_m \rightarrow \mathcal{N}_n$ となる関数 f について考える。ただし $m, n > 0$ とする。

- (a) $f^{3,5}$ で単射になるものが何個あるか。
- (b) $f^{5,3}$ で単射になるものが何個あるか。
- (c) (難問) 一般に、 $f^{m,n}$ で単射になるものが何個あるか、 m と n の式で表しなさい。
- (d) $f^{3,3} \circ f^{3,3}$ が $\mathcal{N}_3$ の上の恒等写像となる $f^{3,3}$ が何個あるか。

問 2 (関数の性質)

関数 $f_a : \mathcal{N}_{17} \rightarrow \mathcal{N}_{17}$ と $g_b : \mathcal{N}_{17} \rightarrow \mathcal{N}_{17}$ を、 $f_a(x) = (x+a) \bmod 17$ 、 $g_b(x) = b \cdot x \bmod 17$ と定める。ただし、 $\bmod$ は、割算の余りを求める演算で、 $a, b \in \mathcal{N}_{17}$ とする。

- (a) $a = 7$ のとき、 f_a は全射か、また、単射か。
- (b) $b = 5$ のとき、 g_b は全射か、また、単射か。
- (c) 合成関数 $g_5 \circ f_7$ による集合 $\{1, 2, 3\}$ の像を求めよ。
- (d) $f_{12} \circ f_5$ が恒等写像となることを示せ。
- (e) $g_7 \circ g_b$ が恒等写像となるときがあるか、ある場合はその b の値をすべて求めよ。

問 3 (関数の性質)

授業の中で関数の性質の証明をやる暇がなかったので、まず、例題として、以下のものを証明する。(ウェブにある 3 章の例題も参考にしてほしい。)

(例題 1) 関数 $f : S \rightarrow T$ と $g : T \rightarrow U$ に対して、 f と g が全射であれば、 $g \circ f$ も全射であることを証明しなさい。

(例題 1 の解答) 全射であることを証明するためには、「任意の $y \in U$ に対して、ある $x \in S$ があって、 $(g \circ f)(x) = y$ となる」ことを言えばよい。

そこで任意の $y \in U$ を取る。 g は全射であるので、ある $z \in T$ が存在して、 $g(z) = y$ となる。さらに、 f は全射であるので、ある $x \in S$ が存在して、 $f(x) = z$ となる。この x に対して、 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y$ となるので、任意の $y \in U$ に対して、 $(g \circ f)(x) = y$ となる $x \in S$ が存在することが言えた。

(例題 2) 関数 $f : S \rightarrow T$ と $g : T \rightarrow S$ および $h : T \rightarrow S$ に対して、 g が f の逆関数で、 h も f の逆関数であれば、 $g = h$ であることを証明しなさい。

(例題 2 の解答) 逆関数の定義により、 $f \circ h = \text{id}_T$ および $g \circ f = \text{id}_S$ が成立する。これを使って、

$$g = g \circ \text{id}_T = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_S \circ h = h$$

となり、 $g = h$ が言えた。なお、途中で、合成関数に関する性質 $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$ を使った。これは、任意の $x \in T$ に対して、

$$(g \circ (f \circ h))(x) = g((f \circ h)(x)) = g(f(h(x))) = (g \circ f)(h(x)) = ((g \circ f) \circ h)(x)$$

となることから言える。

以上を参考に、以下の性質を証明しなさい。

(a) 関数 $f: S \rightarrow T$ と $g: T \rightarrow U$ に対して、 $g \circ f$ が全射であれば、 g が全射であることを証明しなさい。

(b) 関数 $f: S \rightarrow T$ と $g: T \rightarrow U$ に対して、 f が逆関数 f^{-1} を持ち、 g が逆関数 g^{-1} を持つとする。このときは、 $g \circ f$ も逆関数 $(g \circ f)^{-1}$ を持つこと、また、 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であることを証明しなさい。

ヒント: $f^{-1} \circ g^{-1}$ が $g \circ f$ の逆関数であることを証明すればよい。