

『離散構造』演習問題 (亀山)

以下の演習問題に対して、演習実施日までに解答 (A4 サイズ用紙、氏名・学籍番号明記) を用意せよ。

問題 1 (集合の記述)

以下の集合を $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形 (A は集合, $P(x)$ は論理式) で記述せよ。

- (a) 次の覆面算の解となり得る整数の集合 (ただし, ここでは MONEY の部分に対応する 5 けたの数字を「解」と呼ぶことにする)

$$\begin{array}{r} \text{S} \quad \text{E} \quad \text{N} \quad \text{D} \\ + \quad \text{M} \quad \text{O} \quad \text{R} \quad \text{E} \\ \hline \text{M} \quad \text{O} \quad \text{N} \quad \text{E} \quad \text{Y} \end{array}$$

注. 覆面算のルール: それぞれの文字 (S, E, N など) に数字の 0 から 9 までのいずれかがはいる, 異なる文字には同じ数字がはいらない, 各整数の最上位 (S と M) は 0 ではない, 数字をいれたあと上記の計算 (4 けたの整数同士の足し算) が正しい計算になる。

- (b) 自然数を要素とする集合で足し算について閉じているものをすべて集めた集合 (S が足し算について閉じている, とは, S のすべての要素 a, b に対して, $a + b \in S$ であること)
- (c) 実数を要素とする集合で, 最大値を持つもの (最大値が, その集合の要素になっているもの).
- (d) S_1, S_2, S_3 を集合とすると, そのうちちょうど 2 個に含まれる要素たちの集合.

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合同士が等しいかどうかを判定せよ。ただし, 常に等しい場合 (どんな S, T, U 等に対しても等しい場合) はその根拠を簡潔に述べ, 等しくない場合は, 具体的な反例をあげなさい。

- (a) 集合 $S - (T - U)$ と集合 $(S - T) \cup U$.
- (b) 集合 $(S \cup T) \times (U - V)$ と集合 $((S \times U) - (T \times U)) - ((S \times V) - (T \times V))$
- (c) 集合 $2^{S \cup T}$ と集合 $2^S \cup 2^T$.

問題 3 (有限集合の要素数)

S が有限集合のとき, $\#S$ は S の要素数をあらわす。(なお, S の要素数を $|S|$ と書くこともある。)

- (a) 集合 S, T に対して $\#(S - T) = \#S - \#(S \cap T)$ である。
これを使って, 集合 S, T, U に対して, $\#((S - T) - U)$ を, $\#S, \#T, \#U, \#(S \cap T), \#(T \cap U), \#(U \cap S), \#(S \cap T \cap U)$ (のうちの適当ないくつか) を使って表せ。
- (b) 同様に, 集合 S, T, U, V に対して, $\#((S - T) \cup (U - V))$ を求める公式を導きなさい。(前問と同様, S, T, U, V に $\cap$ 演算を何回かほどこした集合の要素数を用いて表しなさい。
- (c) 集合 $S = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 100000\}$ とする。 S の要素のうち, 2 の倍数であって 3 で割りきれないか, あるいは, 5 の倍数であって 7 で割りきれないものの個数を計算しなさい。

問題 4 (集合に対する証明)

- (a) すべての集合 S, T, U に対して, $S - (T \cup U) = (S - T) \cap (S - U)$ を証明しなさい。
- (b) すべての集合 S, T に対して $\#(2^{S \cup T}) \leq \#(2^S) \cdot \#(2^T)$ を証明しなさい。また, 等号が成立するのはどのようなときか。