『離散構造』演習問題 (亀山)

問題 1 (集合の記述)

以下の集合を $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形 (A は集合，$P(x)$ は論理式) で記述せよ．

(a) 次の覆面算の解となり得る整数の集合 (ただし，ここでは MONEY の部分に対応する 5 けたの数字を「解」と呼ぶことにする)

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{S} & \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{D} \\ + & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{R} & \mathrm{E} \\ \hline \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{Y} \end{array}$$

注. 覆面算のルール: それぞれの文字 (S, E, N など) に数字の 0 から 9 までのいずれかがはいり，異なる文字には同じ数字がはいらない，各整数の最上位 (S と M) は 0 ではない，数字をいれたあと上記の計算 (4 けたの整数同士の足し算) が正しい計算になる．

解答 (の一例). 求める集合を $\{x \in \mathcal{N} \mid P(x)\}$ と置くと $P(x)$ の一例は次の通り (いろいろな解答があり得る)。

$$\begin{aligned}
&\exists S, E, N, D, M, O, R, Y \in \mathcal{N}. \\
&(x = 10000M + 1000O + 100N + 10E + Y \wedge (1 \leq S, M \leq 9) \wedge (0 \leq E, N, D, O, R, Y \leq 9) \\
&\wedge (1000(S + M - O) + 100(E + O - N) + 10(N + R - E) + (D + E - Y) = 10000M) \\
&\wedge S \neq E \wedge S \neq N \wedge S \neq D \wedge S \neq M \wedge S \neq O \wedge S \neq R \wedge S \neq Y \\
&\wedge E \neq N \wedge E \neq D \wedge E \neq M \wedge E \neq O \wedge E \neq R \wedge E \neq Y \\
&\wedge N \neq D \wedge N \neq M \wedge N \neq O \wedge N \neq R \wedge N \neq Y \\
&\wedge D \neq M \wedge D \neq O \wedge D \neq R \wedge D \neq Y \\
&\wedge M \neq O \wedge M \neq R \wedge M \neq Y \\
&\wedge O \neq R \wedge O \neq Y \\
&\wedge R \neq Y)
\end{aligned}$$

なお，覆面算を解いて $\{x \in \mathcal{N} \mid x = 10652\}$ としてもよい．

(b) 自然数を要素とする集合で足し算について閉じているものをすべて集めた集合 (S が足し算について閉じている，とは，S のすべての要素 a,b に対して，$a + b \in S$ であること)

解答 (の一例). これが具体的にどのような集合であるか考えると頭が痛くなるが，集合として (その性質を) 記述するだけなら，難しくはない．一例は，

$$\{S \in 2^{\mathcal{N}} \mid \forall a \in S. \forall b \in S.\ a + b \in S\}$$

である．

(c) 実数を要素とする集合で，最大値を持つもの (最大値が，その集合の要素になっているもの)．

解答 (の一例). これも素直に集合の性質を書けばよい．一例は，

$$\{S \in 2^{\mathcal{R}} \mid \exists x \in S.\ \forall y \in S.\ y \leq x\}$$

(d) S_1, S_2, S_3 を集合とするとき，そのうちちょうど 2 個に含まれる要素たちの集合．

解答 (の一例). これも素直に集合の性質を書けばよく，$\{x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \mid P(x)\}$ とすると，この性質 $P(x)$ は以下のように書ける．

$$x \in ((S_1 \cap S_2) \cup (S_2 \cap S_3) \cup (S_3 \cap S_1) - (S_1 \cap S_2 \cap S_3))$$

もちろん，論理記号 $\wedge, \vee$ 等を駆使して以下のように書いてもよい．

$$\begin{aligned}
&((x \in S_1) \wedge (x \in S_2) \wedge \neg(x \in S_3)) \\
\vee&((x \in S_2) \wedge (x \in S_3) \wedge \neg(x \in S_1)) \\
\vee&((x \in S_3) \wedge (x \in S_1) \wedge \neg(x \in S_2))
\end{aligned}$$

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合同士が等しいかどうかを判定せよ。ただし，常に等しい場合 (どんな S, T, U 等に対しても等しい場合) はその根拠を簡潔に述べ、等しくない場合は，具体的な反例をあげなさい。

(a) 集合 $S - (T - U)$ と集合 $(S - T) \cup U$.

解答 (の一例). 必ずしも等しくない．反例は，$S = T = \{\}$ かつ $U = \{1\}$．この時，左の集合は $\{\}$ で，右の集合は $\{1\}$ である．

(b) 集合 $(S \cup T) \times (U - V)$ と集合 $((S \times U) - (T \times U)) - ((S \times V) - (T \times V))$

解答 (の一例). 必ずしも等しくない．反例は，$S = T = U = \{1\}$ かつ $V = \{\}$．この時，左の集合は $\{\langle 1, 1\rangle\}$ で，右の集合は $\{\}$ である．

なお，問題文の 2 つ目の集合を，$((S \times U) - (S \times V)) \cup ((T \times U) - (T \times V))$ に変更すると常に等しくなる．

(c) 集合 $2^{S \cup T}$ と集合 $2^S \cup 2^T$.

解答 (の一例). 必ずしも等しくない．反例は，$S = \{1\}, T = \{2\}$．この時，左の集合は $\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ で，右の集合は $\{\{\}, \{1\}, \{2\}\}$ である．

問題 3 (有限集合の要素数)

S が有限集合のとき、$\#S$ は S の要素数をあらわす。(なお、S の要素数を $|S|$ と書くこともある。)

(a) 集合 S, T に対して $\#(S - T) = \#S - \#(S \cap T)$ である。

これを使って、集合 S, T, U に対して、$\#((S - T) - U)$ を、$\#S$, $\#T$, $\#U$, $\#(S \cap T)$, $\#(T \cap U)$, $\#(U \cap S)$, $\#(S \cap T \cap U)$ (のうちの適当ないくつか) を使って表せ。

解答 (の一例). 以下の通り．

$$\begin{aligned}
\#((S - T) - U) &= \#(S - T) - \#((S - T) \cap U) \\
&= (\#S - \#(S \cap T)) - \#((S \cap U) - (T \cap U)) \\
&= (\#S - \#(S \cap T)) - (\#(S \cap U) - \#(S \cap U \cap T \cap U)) \\
&= \#S - \#(S \cap T) - \#(S \cap U) + \#(S \cap T \cap U)
\end{aligned}$$

ここで，途中の変形では，任意の集合 X, Y, Z に対して，$((X - Y) \cap Z = (X \cap Z) - (Y \cap Z)$ が成立することを使った．(この式は本来証明を要する．)

(b) 同様に、集合 S, T, U, V に対して、$\#((S-T)\cup(U-V))$ を求める公式を導きなさい。(前問と同様，S, T, U, V に $\cap$ 演算を何回かほどこした集合の要素数を用いて表しなさい．)

解答 (の一例). $\#(X\cup Y) = \#X + \#Y - \#(X\cap Y)$ であるので，まず，$\#((S-T)\cap(U-V))$ を計算する．この際，前問と同様に，$((X-Y)\cap Z = (X\cap Z)-(Y\cap Z)$ が成立することを用いる．

$$
\begin{aligned}
\#((S-T)\cap(U-V)) &= \#(S\cap(U-V) - T\cap(U-V)) \\
&= \#(S\cap(U-V)) - \#(S\cap(U-V)\cap T\cap(U-V)) \\
&= \#(S\cap U - S\cap V) - \#(S\cap T\cap U - S\cap T\cap V) \\
&= \#(S\cap U) - \#(S\cap U\cap S\cap V) - (\#(S\cap T\cap U) - \#(S\cap T\cap U\cap S\cap T\cap V)) \\
&= \#(S\cap U) - \#(S\cap U\cap V) - \#(S\cap T\cap U) + \#(S\cap T\cap U\cap V)
\end{aligned}
$$

よって，以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
&\#((S-T)\cup(U-V)) \\
&= \#(S-T) + \#(U-V) - \#((S-T)\cap(U-V)) \\
&= (\#S - \#(S\cap T)) + (\#U - \#(U\cap V)) - (\#(S\cap U) - \#(S\cap U\cap V) - \#(S\cap T\cap U) + \#(S\cap T\cap U\cap V)) \\
&= \#S - \#(S\cap T) + \#U - \#(U\cap V) - \#(S\cap U) + \#(S\cap U\cap V) + \#(S\cap T\cap U) - \#(S\cap T\cap U\cap V)
\end{aligned}
$$

(c) 集合 $S = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \le x \le 100000\}$ とする。S の要素のうち、2 の倍数であって 3 で割りきれないか、あるいは、5 の倍数であって 7 で割りきれないものの個数を計算しなさい．

解答 (の一例). いろいろな計算方法があるが，ここは素直に前問の結果を使う．

S の要素のうち，n の倍数の集合を S_n と書くことにする．求めたいのは $(S_2 - S_3)\cup(S_5 - S_7)$ の要素数である．

$\#S_2 = 50000$, $\#(S_2\cap S_3) = 16666$, $\#S_5 = 20000$, $\#(S_5\cap S_7) = 2857$, $\#(S_2\cap S_5) = 10000$,
$\#(S_2\cap S_5\cap S_7) = 1428$, $\#(S_2\cap S_3\cap S_5) = 3333$, $\#(S_2\cap S_3\cap S_5\cap S_7) = 476$
よって，前問の公式より，$50000 - 16666 + 20000 - 2857 - 10000 + 1428 + 3333 - 476 = 44762$ となる．

問題 4 (集合に対する証明)

(a) すべての集合 S, T, U に対して，$S-(T\cup U) = (S-T)\cap(S-U)$ を証明しなさい．

解答 (の一例).「左辺 $\subset$ 右辺」を示そう．$x \in S-(T\cup U)$ と仮定する．集合演算 $-$ と $\cup$ の性質から，$x\in S$ かつ $\neg(x\in(T\cup U))$ である。後半は、$\neg((x\in T)\vee(x\in U))$ ということであり、命題論理の知識 (ド・モルガンの法則) を使えば、$\neg(x\in T)$ かつ $\neg(x\in U)$ である．

[2014/12/4 修正: 上記の解答の途中で、「後半は、$\neg((x\in S)\vee(x\in U))$ ということであり、」と書いていましたが、これは「後半は、$\neg((x\in T)\vee(x\in U))$ ということであり、」の間違いです。指摘してくれたシュウ君に感謝します。–亀山]

最初の 2 つより，$x\in S-T$ である．また，1 番目と 3 番目より $x\in S-U$ である．よって，$\cap$ の性質より，$x\in(S-T)\cap(S-U)$ である．以上から,「左辺 $\subset$ 右辺」が示された．

「右辺 $\subset$ 左辺」を示そう．$x\in(S-T)\cap(S-U)$ と仮定する．集合演算 $-$ と $\cup$ の性質から,「$x\in S$ かつ $\neg(x\in T)$」かつ「$x\in S$ かつ $\neg(x\in U)$」である．

$\neg(x\in T)$ かつ $\neg(x\in U)$ ということから、$\neg((x\in T)\vee(x\in U)$ が言えて、これより，$\neg(x\in T\cup U)$ である。これと $x\in S$ を合わせて，$x\in S-(T\cup U)$ が言えた．以上から,「右辺 $\subset$ 左辺」が示された．

(b) すべての集合 S, T に対して $\#(2^{S\cup T}) \le \#(2^S)\cdot\#(2^T)$ を証明しなさい．また，等号が成立するのはどのようなときか．

解答 (の一例). $\#S = m, \#T = n$ とする．$\#(S\cup T) = \#S + \#T - \#(S\cap T) \le m+n$ である．これより，$\#(2^{S\cup T}) = 2^{\#(S\cup T)} \le 2^{m+n} = 2^m\cdot 2^n = 2^{\#S}\cdot 2^{\#T}$ となり，問題文の不等式が証明できた．

等号が成立するのは、$\#(S\cap T) = 0$ のときであり、これは $S\cap T = \{\}$ と同値であるので、これが等号成立の必要十分条件である。