『離散構造』 Short Quiz (解答例つき)
(亀山)

以下のものについて、本日の授業終了時点までに解き提出しなさい。

学籍番号: ______________________

氏名: ______________________

Quiz 1. 論理式 $(P \vee (\neg Q)) \wedge ((\neg P) \vee Q)$ は充足可能であるか？ YES なら、この論理式が真 (True) となる割り当てを示し、NO なら、この論理式がいつでも偽 (False) となる理由を言葉で説明しなさい。
解答. 充足可能である。たとえば、P=真 (true), Q=真 (true) という割り当てをすればよい。$(P \vee (\neg Q)$ は真であり、$(\neg P) \vee Q$ も真となるので、論理式全体が真となる。)

Quiz 2. 論理式 $(\forall x.\ \exists y.\ P(x,y)) \Rightarrow (\exists y.\ \forall x.\ P(x,y))$ は、いかにも成立しそうに見えるが、実際には恒真ではない。x, y が整数上を動く変数で、$P(x,y)$ が $x < y$ のときに、上記の式が必ずしも真でないことを確認せよ。(それを簡単に言葉で説明せよ。)
解答. x, y が整数上を動く変数で、$P(x,y)$ が $x < y$ のとき、

$\forall x.\ \exists y.\ P(x,y)$ は、「すべての整数 x に対して、それより大きな y が存在する」という意味であり、実際に $y = x + 1$ ととれば成立するので真である。

$\exists y. \forall x.\ P(x,y)$ は、「ある整数 y があって、すべての整数 x よりも大きい」という意味であり、どんな整数よりも大きな整数 y というのは存在しないので、偽である。

よって、$\Rightarrow$ の前提が真で、結論が偽であるので、$\Rightarrow$ の真理値表より、論理式全体は偽である。

恒真性について、(今回の授業では、述語論理式が「恒真」であることの定義は述べていないが、informal に「論理式をどのように解釈しても真となる」と考えたとして)、上記のように、「整数上を動く変数」のもとで、「P を大小関係」に取ると、偽になる (偽になるケースが 1 つあった) ので、問題文の論理式は恒真ではない。

なお、述語論理式が「恒真」かどうかの定義およびその確認は、「離散構造」の範囲を越えるので、今回の授業では (期末試験等でも) 扱わない。