

『離散構造』 1 章の演習問題の解答例 (亀山)

以下の問題について、次回の演習実施日までに解答を用意せよ。

問 1 次の日本語の文を命題論理の論理式として表現しなさい。

- (a) 「筑波大学の正規生または科目等履修生であって、TWINS でこの授業を履修申請済みであれば (ただし、履修申請予定も含む)、この授業を聴講できる。」

ただし、原子命題 (基本命題) として、 P = 「筑波大学の正規生である」、 Q = 「筑波大学の科目等履修生である」、 R = 「TWINS でこの授業を履修申請している」、 S = 「TWINS でこの授業を履修申請予定である」、 T = 「この授業を聴講できる」を使うこと。

解答例. $((P \vee Q) \wedge (R \vee S)) \Rightarrow T$.

- (b) 「晴れていれば傘を持っていくし、雨であっても傘を持っていくことにしているが、今日は傘を持っていかないで、晴れでも雨でもないということだ。」

原子命題: P = 「晴れている」、 Q = 「雨である」、 R = 「傘を持っていく」 (なお、「今日は」の部分は命題論理の範囲では定式化できないので無視してよい。)

解答例. $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (\neg R)) \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.

補足. なお、この定式化には違和感を持つ人が多いだろう。というのは、ここでは、「... かつ (今日は) 傘を持っていない、ならば ...」と定式化したが、日本語の文で言っていることは、「今日は傘を持っていない」という事実 (仮定ではなく、それが真であるということ) を主張しているので、上記の論理式とはあっていないのである。

もし、成立している事実を並べるとしたら、 $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (\neg R)) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$. というように、「。。。ならば。。。ではなく、「。。。かつ。。。」とすべきという考えもある。

この「違和感」は、今回の問題文がまずかったせいであり、「A ならば B である。A がなりたっている。よって B である。」という「推論の過程」を定式化しようとしているのか、(この「よって。。。である。」の部分) を定式化しようとしているのか、「なりたつ事実を論理式として表そうとしているのか」という立場の違いによって、2 つの定式化があり得て、どちらも間違いとはいえない。

こういう曖昧さを残さないためには、もとの問題文は、以下のものでなければならなかった。「晴れていれば傘を持っていくし、雨であっても傘を持っていくことにしているの、傘を持っていかないなら、晴れでも雨でもないということだ。」

- (c) 「私がピンチのときにあなたが私を助けてくれるなら、私もあなたに同じことをしよう。」

原子命題: P = 「私がピンチである」、 Q = 「あなたが私を助ける」、 R = 「あなたがピンチである」、 S = 「私があなたを助ける」

解答例. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

問 2 下記の命題が恒真であるか、また、充足可能であるか、判定せよ。

- (a) $(A \vee B) \wedge (C \vee A) \Leftrightarrow ((C \wedge B) \vee A)$.
(b) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$.
(c) $(A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C)$.

ただし、3 個以上の論理式を $\wedge$ や $\vee$ でつないだときは、左から括弧をつけていくものとする。

解答例. 論理式 $(A \vee B) \wedge (C \vee A) \Leftrightarrow ((C \wedge B) \vee A)$ は恒真であり、充足可能でもある。真理値表は以下の通り。(解答にあたっては適宜省略してもよい)。

A	B	C	$A \vee B$	$C \vee A$	$(A \vee B) \wedge (C \vee A)$	$C \wedge B$	$(C \wedge B) \vee A$	全体
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

論理式 $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ は、恒真であり、充足可能でもある。真理値表は以下の通り。

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	全体
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

論理式 $(A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C)$ は、恒真ではないが、充足可能である。真理値表は以下の通り。(少し省略している。)

A	B	C	$A \vee B \vee (\neg C)$	$A \vee (\neg B) \vee C$	$(\neg A) \vee B \vee C$	論理式全体
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	T	T

問3 上記の問1と同じ日本語の文(3つ)をそれぞれ述語論理の論理式として表現しなさい。

(a) については、原子述語として、 $p(x)$ = 「 x が筑波大学の正規生である」、 $q(x)$ = 「 x が筑波大学の科目等履修生である」、 $r(x,y)$ = 「 x が授業 y を履修申請している」、 $s(x,y)$ = 「 x が授業 y を履修申請予定である」、 $t(x,y)$ = 「 x が授業 y を聴講できる」とし、また、DS で、「この授業」を表すとする。(注意、 x に対する限量子として、どこにどのようなものを置けばよいか、考えること。)

解答例. $\forall x. ((p(x) \vee q(x)) \wedge (r(x, DS) \vee s(x, DS)) \Rightarrow t(x, DS))$.

(b) については、原子述語として、 $p(x)$ = 「 x 日が晴れている」、 $q(x)$ = 「 x 日が雨である」、 $r(x,y)$ = 「 x 日に傘を持っていく」を使い、Today で「今日」を表すとする。

訂正. 上記の、 $r(x,y)$ の定義では、「 x 日に傘を持っていく」の中に y が出現しないので、 $r(x)$ という述語にすべきであった。ここでは $r(x)$ に修正して記述する。

解答例. 「晴れていれば傘を持っていくし、雨であっても傘を持っていくことにしているが、今日は傘を持っていないので、晴れでも雨でもないということだ。」

$(\forall x. (p(x) \Rightarrow r(x)) \wedge \forall x. (q(x) \Rightarrow r(x)) \wedge (\neg r(\text{Today}))) \Rightarrow (\neg p(\text{Today}) \wedge \neg q(\text{Today}))$.

(c) については、原子述語として、 $p(x)$ = 「 x がピンチである」、 $q(x,y)$ = 「 x が y を助ける」を使い、また、 I で「私」を、 You で「あなた」を表す。

解答例. $(p(I) \Rightarrow q(You, I)) \Rightarrow (p(You) \Rightarrow q(I, You))$.

問 4 (発展問題) 原子命題 P と論理記号だけからなる命題論理式の中で、互いに同値でないものは 4 つある。 $(P$ と $\neg P$ と $P \Rightarrow P$ と $P \wedge (\neg P)$ 。これら以外の論理式はすべてこの 4 つのいずれかと同値である)。

原子命題 P, Q と論理記号だけからなる命題論理式の中で、互いに同値でないものはいくつあるか？

解答例. 真理値表を考えると、原子命題が P と Q の場合は、(見出し行を除いて) 4 行ある。この 4 行のそれぞれに真か偽のいずれかを割り当てることができるので、異なる真理値パターンをもつ論理式は、最大で、 $2^4 = 16$ 個である。

この 16 種類が、実際に P, Q と論理記号で表現できることをチェックしよう。以下の通りである。

$$\begin{aligned} &P \Rightarrow P, \\ &P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee Q, \neg P \vee \neg Q, \\ &P, Q, \neg P, \neg Q, (P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q)), (P \wedge (\neg Q)) \vee ((\neg P) \wedge Q), \\ &P \wedge Q, P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, \neg P \wedge \neg Q, \\ &P \wedge (\neg P) \end{aligned}$$

一般に、 n 個の相異なる原子命題と論理記号だけからなる命題論理式の中で、互いに同値でないものはいくつあるか？

n 個の原子命題に対する真理値表は 2^n 行あり、そのそれぞれで true/false のいずれかの値を取る「列」は、全部で 2^{2^n} 通りある。よって、最大値は 2^{2^n} であるが、実際に、この個数の異なる真理値をとる命題を作ることができるので、これが答えとなる。

このうち「実際に、、作るができる」という部分は、皆さんで考えてほしい。