

『離散構造』 1章の例題

問 1 (命題論理による表現)

例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。ただし、各問題ごとに指定された基本命題を使うこと。

- (a) 「雨が降っていたら、A 君は傘を持っていく。」
- (b) 「A 君は怒られなければ勉強しない。」と「A 君が勉強したら怒られた。」(基本命題: P = 「A 君が怒られる」、 Q = 「A 君が勉強する」)
- (c) 「授業が面白いか、単位が欲しければ、授業に出席する。」(基本命題: P = 「授業が面白い」、 Q = 「単位が欲しい」、 R = 「授業に出席する」)

問 2 (述語論理による表現)

次の文を述語論理の論理式で表現せよ。

- (a) 「A さんが B さんの親で、B さんが C さんの親なら、A さんは C さんの祖父か祖母である。」
- (b) 「 x は平方数である (ある整数の 2 乗になっている)。」
- (c) 「情報科学類の学生ならば、プログラミングが大好きである。」
- (d) (発展課題) 「 x は y と z の最小公倍数である」

問 3 真理値表に関する以下の問いに答えよ。

- (a) 命題 $A \wedge B$ の否定の真理値表と、命題 $(\neg A) \vee (\neg B)$ の真理値表が等しくなることを確認せよ。このことを通して、命題「 x と y が奇数である」を否定すると、命題「 x が奇数でないか、または、 y が奇数でない」となることを確認せよ。
- (b) 命題 $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ の真理値表を作成し、恒真式となるか否かを確認せよ。

問 4 以下の式の両辺は、論理的に同値である。

$$\begin{aligned}(\neg(\neg A)) &\Leftrightarrow A \\(\neg(A \wedge B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)) \\(\neg(A \vee B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)) \\(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \\(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \\((A \wedge B) \vee C) &\Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \\(C \vee (A \wedge B)) &\Leftrightarrow ((C \vee A) \wedge (C \vee B))\end{aligned}$$

上記の同値性を利用して、以下の命題を論理積標準形 (Conjunctive Normal Form) に変形せよ。

- $(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E).$
- $\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)).$

ただし、論理積標準形とは以下の形の命題のことである。

$$(L_{1,1} \vee L_{1,2} \vee \cdots \vee L_{1,n}) \wedge \cdots \wedge (L_{k,1} \vee L_{k,2} \vee \cdots \vee L_{k,n'})$$

(各 $L_{i,j}$ は、基本命題か、基本命題に否定記号 ($\neg$) をつけたものに限る。)

問 5 (発展課題) 以下の文を、証明もしくは反証せよ。ただし、反証とは正しくないことを証明することである。

- (a) 連続した 3 つの自然数をかけた数は、6 で割り切れる。
- (b) 7 で割り切れない自然数の 6 乗は、7 で割ると 1 余る。

問 6 (発展的な問題)

以下の論理式が常に正しいかどうか、理由をつけて述べよ。

- $(\exists y. \forall x. P(x, y)) \Rightarrow (\forall x. \exists y. P(x, y))$
- $(\forall x. \exists y. P(x, y)) \Rightarrow (\exists y. \forall x. P(x, y))$

[ヒント: x, y を自然数を表す変数とし、 $P(x, y)$ を「 $x = y$ 」や「 $x < y$ 」などとしてみるとよい。]