『離散構造』 1章の例題とその解答

問 1 (命題論理による表現)
例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。ただし、各問題ごとに指定された基本命題を使うこと。

(a) 「雨が降っていたら，A 君は傘を持っていく。」

答. 基本命題として，P=「雨が降っている」, Q=「A 君は傘を持っていく」とすれば、「$P \Rightarrow Q$」と表現できる。

(b) 「A 君は怒られなければ勉強しない.」と「A 君が勉強したら怒られた.」(基本命題: P=「A 君が怒られる」、Q=「A 君が勉強する」)

答. 前者は、「$(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$」である。後者は、「$Q \Rightarrow P$」である。

[補足] この 2 つの論理式は、真理値表を書けばわかるように、同値である。つまり、「A 君は怒られなければ勉強しない.」という場合に、「A 君が勉強したら怒られた.」ということになってしまう、という不思議な現象である。

しかし、よく考えてみれば、不思議なことはない。上記の日本語の文は、時間的順序 (因果関係) を含んでいるのに対して、論理式では、時間の情報が失われてしまったのが問題である。つまり、「A 君は怒られなければ勉強しない.」と同値な (日本語の) 文は、「A 君が勉強したら怒られた.」ではなく、「A 君が勉強しているとしたら、それより前に怒られたからだ.」という意味になる。これならば、何も矛盾はない。

(c) 「授業が面白いか，単位が欲しければ，授業に出席する.」(基本命題: P=「授業が面白い」、Q=「単位が欲しい」、R=「授業に出席する」)

答. これは、「$(P \vee Q) \Rightarrow R$」となる。

問 2 (述語論理による表現)
次の文を述語論理の論理式で表現せよ。

(a) 「A さんが B さんの親で、B さんが C さんの親なら、A さんは C さんの祖父か祖母である。」

答. 「x は y の親である」を $P(x,y)$ とし、「x は y の祖父である」を $Q(x,y)$ とし、「x は y の祖母である」を $R(x,y)$ とすると、「$(P(A,B) \wedge P(B,C)) \Rightarrow (Q(A,Z) \vee R(A,Z))$」 と表せる。

(b) 「x は平方数である (ある整数の 2 乗になっている)。」

答. 「y は整数である」を $\texttt{int}(y)$ と表す。上記の文は、$\texttt{int}(y) \wedge x = y^2$ という命題になりそうであるが、これでは x だけでなく，y にも依存する命題となってしまう．問題文は x のみについて書いてあるので，これではおかしい。実際には「そのような y がある」ということなので、述語論理の範囲で、「$\exists y.\, (\texttt{int}(y) \wedge x = y^2)$」と記述するとよい。このように書けば,「ある y について... が成立する」という命題になり，y には依存しない.

(c) 「情報科学類の学生ならば、プログラミングが大好きである。」

答. 「x は情報科学類の学生である」を $J(x)$ とし、「x はプログラミングが大好きである」を $P(x)$ とすると、「$J(x) \Rightarrow P(x)$」と表現できそうに思うかもしれないが、これでは、「x が情報科学類の学生ならば、x はプログラミングが大好きである。」という意味になってしまう。

上記の日本語は、(暗黙のうちに) 「すべての x に対して、。。。が成立する」という意味になっているので、「すべての」をあらわす論理記号を追加して、「$\forall x.\, (J(x) \Rightarrow P(x))$」と表現するとよい。

数学やソフトウェアの世界では、このように「暗黙のうちに、「すべての」を省略する」ことが非常に多くおこなわれている。

(d) (発展課題) 「x は y と z の最小公倍数である」

答. 「y は x を割り切る (x は y の倍数である)」を $y|x$ と表すと、「$y|x \wedge z|x$」となりそうである。しかし、これでは、「そのようなものの中で x が最小である」であることが表現できていない。「ある性質を満たすものの中で最小」というのは結構難しい。答えは以下の通り。

$$(y|x \wedge z|x) \wedge \forall w.\ ((y|w \wedge z|w) \Rightarrow x \leq w)$$

この式の右の方は、「w が y, z の公倍数であれば、$x \leq w$ である」という性質が、どんな w に対しても成立する、ということなので、x が y, z の公倍数の中で最小であることを意味する。

問 3 真理値表に関する以下の問いに答えよ。

(a) 命題 $A \wedge B$ の否定の真理値表と、命題 $(\neg A) \vee (\neg B)$ の真理値表が等しくなることを確認せよ。このことを通して、命題「x と y が奇数である」を否定すると、命題「x が奇数でないか、または、y が奇数でない」となることを確認せよ。

答. 真理値表は以下の通り。

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

命題 A を「x が奇数である」、命題 B を「y が奇数である」とすると、$A \wedge B$ は、「x と y が奇数である」となり、$(\neg A) \vee (\neg B)$ は、「x が奇数でないか、または、y が奇数でない」となる。上記の真理値表より、前者の否定と後者は同値である。

(b) 命題 $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ の真理値表を作成し、恒真式となるか否かを確認せよ。

答. 真理値表は以下の通りで、恒真式となる。

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	全体
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T

問 4 以下の式の両辺は、論理的に同値である。

$$
\begin{aligned}
(\neg(\neg A)) &\Leftrightarrow A \\
(\neg(A \wedge B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)) \\
(\neg(A \vee B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)) \\
(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \\
(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \\
((A \wedge B) \vee C) &\Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \\
(C \vee (A \wedge B)) &\Leftrightarrow ((C \vee A) \wedge (C \vee B))
\end{aligned}
$$

上記の同値性を利用して、以下の命題を論理積標準形 (Conjunctive Normal Form) に変形せよ。

- $(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E)$.
- $\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D))$.

ただし、論理積標準形とは以下の形の命題のことである。

$$(L_{1,1} \vee L_{1,2} \vee \cdots \vee L_{1,n}) \wedge \cdots \wedge (L_{k,1} \vee L_{k,2} \vee \cdots \vee L_{k,n'})$$

(各 $L_{i,j}$ は、基本命題か、基本命題に否定記号 ($\neg$) をつけたものに限る。)

答。命題 $(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E)$ の論理積標準形の計算は以下の通り。(以下の計算では、書き換えの 1 ステップを矢印 ($\leadsto$) で表現している。)

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E) &\leadsto (A \vee (D \wedge E)) \wedge (B \vee (D \wedge E)) \wedge (C \vee (D \wedge E)) \\
&\leadsto (A \vee D) \wedge (A \vee E) \wedge (B \vee D) \wedge (B \vee E) \wedge (C \vee D) \wedge (C \vee E)
\end{aligned}
$$

命題 $\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D))$ の論理積標準形の計算は以下の通り。

$$
\begin{aligned}
\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)) &\leadsto \neg((\neg(A \wedge B)) \vee (C \vee D)) \\
&\leadsto (\neg(\neg(A \wedge B))) \wedge (\neg(C \vee D)) \\
&\leadsto (A \wedge B) \wedge ((\neg C) \wedge (\neg D)) \\
&\leadsto A \wedge B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D)
\end{aligned}
$$

問 5 (発展課題) 以下の文を，証明もしくは反証せよ．ただし，反証とは正しくないことを証明することである．

(a) 連続した 3 つの自然数をかけた数は，6 で割り切れる．

答。「問 1」でやったように、問題文は、「すべての連続した 3 つの自然数に対して、それらをかけた数は、6 で割り切れる。」という意味である。これが正しいかどうかであるが、連続した 2 つの整数の積は 2 で割り切れ、連続した 3 つの整数の積は 3 で割り切れるので、連続した 3 つの整数の積は 6 で割り切れる。よって正しい。

(b) 7 で割り切れない自然数の 6 乗は，7 で割ると 1 余る．

答。正しいので証明する。まず、「x^6 を 7 で割った余り」は、「「x を 7 で割った余り」の 6 乗を 7 で割った余り」と等しい。x は 7 で割り切れないので、「x を 7 で割った余り」は 1,2,3,4,5,6 のいずれかである。これらを 6 乗して 7 で割ってみると、余りは、1,1,1,1,1,1 となるので、いずれのケースでも 7 で割ると 1 余る。

なお、この問題は、Fermat の (小) 定理の具体的な例である。

問 6 (発展的な問題)

以下の論理式が常に正しいかどうか，理由をつけて述べよ．

- $(\exists y.\forall x.P(x,y)) \Rightarrow (\forall x.\exists y.P(x,y))$

  答。真である。$\Rightarrow$ の前の部分論理式 (「$\Rightarrow$ の前提」と言う) が真であるとき、どんな x に対しても、$P(x,y)$ が成立する y が存在する。この y のことを y_0 と書くことにする。

  $\Rightarrow$ の後の部分論理式において、「どんな x に対しても、上記の y_0 をとってくれば $P(x,y_0)$ が成立する」のだから、$\forall x.\exists y.P(x,y)$ は真である。

  以上から、どんな $P(x,y)$ に対しても上記の命題が成立する。

- $(\forall x.\exists y.P(x,y)) \Rightarrow (\exists y.\forall x.P(x,y))$

  [ヒント: x,y を自然数を表す変数とし, $P(x,y)$ を「$x=y$」 や「$x<y$」などとしてみるとよい．]

  答。$P(x,y)$ を $x<y$ と置いてみると、$\forall x.\exists y.P(x,y)$ は、「どんな自然数 x に対しても、それより大きい自然数 y が存在する」という意味になり、これは真である。($y=x+1$ と取れば良い。)

  一方、$\exists y.\forall x.P(x,y)$ は、「どんな自然数 x よりも大きい自然数 y が存在する」という意味になり、そんな自然数は存在しないので偽である。

  $\Rightarrow$ の前提が真で、帰結が偽なので、全体としては、偽である。

  $P(x,y)$ を $x<y$ と置いてみた場合だけであっても、偽となるケースがある、ということは、最初の論理式は「常に正しくはない」ということになる。