『離散構造』(亀山)

Short Quiz の略解

Quiz. 関数 $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ が $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ で与えられる。ただし、 a, b, c, d は実数であり、 $a \neq 0$ とする。このとき、 f は全射か、また、単射か？

答. $a > 0$ ならば、 x がプラスの無限大に行くとき $f(x)$ の値はプラスの無限大に行き、 x がマイナスの無限大に行くとき、 $f(x)$ の値はマイナスの無限大に行く。 $a < 0$ ならば、その逆であり、いずれにしても、(f は連続なので) $f(x)$ の値は、 $\mathcal{R}$ 全体に行きわたる。よって f は常に全射である。

f が単射であるのは、 f に極値が存在しないとき (判別式が重根を持ち、変曲点をもつ場合を含む)、およびそのときに限る。

よって、 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ の判別式 $D = 4b^2 - 12ac$ が負であるかゼロであるとき単射である。

よって、「 f が単射」であることの必要十分条件は、「 $b^2 - 3ac \leq 0$ 」である。