

『離散構造』 Short Quiz 略解

2013 年 11 月 8 日 (海野)

問題 1 自然数の集合 $\mathcal{N}$ 上の 2 項関係で、対称的でも反対称的でもないものを挙げよ。

答. 題意を満たす関係は唯一ではない。ここでは以下の 2 つの関係について説明する。

$$\begin{aligned} R_1 &= \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\} \\ R_2 &= \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N} \mid x \bmod 7 \leq y \bmod 7\} \end{aligned}$$

ここで、 $x \bmod y$ は x を y で割った余りを表す。

- $2 R_1 3$ だが $3 R_1 2$ ではないので R_1 は対称的ではない。そして、 $0 R_1 1$ かつ $1 R_1 0$ であるが、 $0 \neq 1$ なので R_1 は反対称的でもない。
- また、 $0 R_2 1$ だが $1 R_2 0$ ではないので R_2 は対称的ではない。そして、 $0 R_2 7$ かつ $7 R_2 0$ だが、 $0 \neq 7$ なので R_2 は反対称的でもない。

問題 2 集合 $A = \{s0001, s0002, s0003, s0004, s0005, s0006\}$, $B = \{\text{佐藤, 鈴木, 高橋, 田中, 渡辺, 伊藤}\}$, $C = \{0, \dots, 100\}$ について、 A, B 上の 2 項関係 $R \subset A \times B$ と B, C 上の 2 項関係 $S \subset B \times C$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned} R &= \{\langle s0001, \text{佐藤} \rangle, \langle s0002, \text{鈴木} \rangle, \langle s0003, \text{高橋} \rangle, \langle s0004, \text{田中} \rangle, \langle s0005, \text{渡辺} \rangle, \langle s0006, \text{伊藤} \rangle\} \\ S &= \{\langle \text{佐藤}, 40 \rangle, \langle \text{鈴木}, 70 \rangle, \langle \text{高橋}, 50 \rangle, \langle \text{渡辺}, 30 \rangle, \langle \text{伊藤}, 90 \rangle\} \end{aligned}$$

関係 R は学籍番号と学生名との対応を表し、関係 S は学生名と離散構造 期末試験点数との対応を表している。学籍番号と期末試験点数との対応を表す関係 $R \circ S \subset A \times C$ を求めよ。

答. 合成関係の定義通りに計算すると、

$$R \circ S = \{\langle s0001, 40 \rangle, \langle s0002, 70 \rangle, \langle s0003, 50 \rangle, \langle s0005, 30 \rangle, \langle s0006, 90 \rangle\}$$

となる。このように、 $\langle \text{田中}, x \rangle \in S$ となるような x が、(テストを受けなかったなどの理由によって) 存在しない場合でも、上のような合成関係 $R \circ S$ が得られることに注意。