

『離散構造』6章(帰納)の演習問題

出題: 2013 年 12 月 06 日

期限: 2013 年 12 月 13 日の授業

問題 1 (集合の帰納的定義)

- (a) 自然数のリストで、昇順に並んでいる (どの要素もそれより左にある要素より小さくない) ものの集合を帰納的に定義しなさい。
- (b) $a^m b^n$ という形の文字列で、 $0 \leq m \leq n$ となるものの集合 S を帰納的に定義せよ。ただし、 a^m は文字 a を m 個ならべた文字列を表す。

問題 2 (関数の帰納的定義)

真理値の集合 $V = \{T, F\}$ とし、論理式の集合 E を次の帰納的定義により定める。(本問では、定義される式を他の文と区別するため「」で囲うことにする。「」そのものは式の一部ではないことに注意せよ。)

- 「 X 」は論理式である。
- 「 T 」は論理式である。
- 「 F 」は論理式である。
- 「 e 」が論理式ならば、「 $\neg e$ 」は論理式である。
- 「 e_1 」と「 e_2 」が論理式ならば、「 $(e_1 \wedge e_2)$ 」は論理式である。
- 「 e_1 」と「 e_2 」が論理式ならば、「 $(e_1 \vee e_2)$ 」は論理式である。

このように定義された論理式に対して関数 $f: E \times V \rightarrow V$ と $g: E \rightarrow E$ を次のように帰納的に定める。

$$f(e, b) = \begin{cases} b & (\text{if } e = \text{「}X\text{」}) \\ T & (\text{if } e = \text{「}T\text{」}) \\ F & (\text{if } e = \text{「}F\text{」}) \\ \neg f(e_1, b) & (\text{if } e = \text{「}\neg e_1\text{」}) \\ f(e_1, b) \wedge f(e_2, b) & (\text{if } e = \text{「}(e_1 \wedge e_2)\text{」}) \\ f(e_1, b) \vee f(e_2, b) & (\text{if } e = \text{「}(e_1 \vee e_2)\text{」}) \end{cases} \quad g(e) = \begin{cases} \text{「}\neg X\text{」} & (\text{if } e = \text{「}X\text{」}) \\ \text{「}F\text{」} & (\text{if } e = \text{「}T\text{」}) \\ \text{「}T\text{」} & (\text{if } e = \text{「}F\text{」}) \\ \text{「}e_1\text{」} & (\text{if } e = \text{「}\neg e_1\text{」}) \\ \text{「}(g(e_1) \vee g(e_2))\text{」} & (\text{if } e = \text{「}(e_1 \wedge e_2)\text{」}) \\ \text{「}(g(e_1) \wedge g(e_2))\text{」} & (\text{if } e = \text{「}(e_1 \vee e_2)\text{」}) \end{cases}$$

これに対して、以下の問に答えよ。

- (a) $f(\text{「}((T \wedge X) \vee \neg T)\text{」}, F)$ の値を求めよ。
- (b) $f(\text{「}\neg(T \wedge (F \vee X))\text{」}, T)$ の値を求めよ。
- (c) $g(\text{「}((T \wedge X) \vee \neg T)\text{」})$ の値を求めよ。
- (d) $g(\text{「}\neg(T \wedge (F \vee X))\text{」})$ の値を求めよ。
- (e) 任意の論理式 $e \in E$ と真理値 $b \in V$ について $\neg f(e, b) \Leftrightarrow f(g(e), b)$ であることを証明しなさい。
- (f) 任意の論理式 $e \in E$ と真理値 $b \in V$ について $f(e, b) \Leftrightarrow f(g(g(e)), b)$ であることを証明しなさい。