

『離散構造』6章(帰納)の演習問題 解答例 (海野)

問題 1 (集合の帰納的定義)

- (a) 自然数のリストで、昇順に並んでいる (どの要素もそれより左にある要素より小さくない) ものの集合を帰納的に定義しなさい。

答. $OrdList$ を以下を満たす最小の集合として帰納的に定義する。

- $\langle \rangle \in OrdList$
- $\forall n(n \in \mathcal{N} \Rightarrow \langle n \rangle \in OrdList)$
- $\forall m, n, L(m \in \mathcal{N} \wedge n \in \mathcal{N} \wedge \text{cons}(n, L) \in OrdList \wedge m \leq n \Rightarrow \text{cons}(m, \text{cons}(n, L)) \in OrdList)$

- (b) $a^m b^n$ という形の文字列で、 $0 \leq m \leq n$ となるものの集合 S を帰納的に定義せよ。ただし、 a^m は文字 a を m 個ならべた文字列を表す。

答. S を以下を満たす最小の集合として帰納的に定義する。

- $\Lambda \in S$
- $s \in S \Rightarrow asb \in S$
- $s \in S \Rightarrow sb \in S$

問題 2 (関数の帰納的定義)

真理値の集合 $V = \{T, F\}$ とし、論理式の集合 E を次の帰納的定義により定める。(本問では、定義される式を他の文と区別するため「」で囲うことにする。「」そのものは式の一部ではないことに注意せよ。)

- 「 X 」は論理式である。
- 「 T 」は論理式である。
- 「 F 」は論理式である。
- 「 e 」が論理式ならば、「 $\neg e$ 」は論理式である。
- 「 e_1 」と「 e_2 」が論理式ならば、「 $(e_1 \wedge e_2)$ 」は論理式である。
- 「 e_1 」と「 e_2 」が論理式ならば、「 $(e_1 \vee e_2)$ 」は論理式である。

このように定義された論理式に対して関数 $f : E \times V \rightarrow V$ と $g : E \rightarrow E$ を次のように帰納的に定める。

$$f(e, b) = \begin{cases} b & (\text{if } e = \text{「}X\text{」}) \\ T & (\text{if } e = \text{「}T\text{」}) \\ F & (\text{if } e = \text{「}F\text{」}) \\ \neg f(e_1, b) & (\text{if } e = \text{「}\neg e_1\text{」}) \\ f(e_1, b) \wedge f(e_2, b) & (\text{if } e = \text{「}(e_1 \wedge e_2)\text{」}) \\ f(e_1, b) \vee f(e_2, b) & (\text{if } e = \text{「}(e_1 \vee e_2)\text{」}) \end{cases} \quad g(e) = \begin{cases} \text{「}\neg X\text{」} & (\text{if } e = \text{「}X\text{」}) \\ \text{「}F\text{」} & (\text{if } e = \text{「}T\text{」}) \\ \text{「}T\text{」} & (\text{if } e = \text{「}F\text{」}) \\ \text{「}e_1\text{」} & (\text{if } e = \text{「}\neg e_1\text{」}) \\ \text{「}(g(e_1) \vee g(e_2))\text{」} & (\text{if } e = \text{「}(e_1 \wedge e_2)\text{」}) \\ \text{「}(g(e_1) \wedge g(e_2))\text{」} & (\text{if } e = \text{「}(e_1 \vee e_2)\text{」}) \end{cases}$$

これに対して、以下の問に答えよ。

(a) $f(\lceil (T \wedge X) \vee \neg T \rceil, F)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{aligned}
 f(\lceil (T \wedge X) \vee \neg T \rceil, F) &= f(\lceil T \wedge X \rceil, F) \vee f(\lceil \neg T \rceil, F) && (\text{fの定義による}) \\
 &= (f(\lceil T \rceil, F) \wedge f(\lceil X \rceil, F)) \vee \neg f(\lceil T \rceil, F) && (\text{fの定義による}) \\
 &= (T \wedge F) \vee \neg T && (\text{fの定義による}) \\
 &\Leftrightarrow F
 \end{aligned}$$

(b) $f(\lceil \neg(T \wedge (F \vee X)) \rceil, T)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{aligned}
 f(\lceil \neg(T \wedge (F \vee X)) \rceil, T) &= \neg f(\lceil T \wedge (F \vee X) \rceil, T) && (\text{fの定義による}) \\
 &= \neg(f(\lceil T \rceil, T) \wedge f(\lceil F \vee X \rceil, T)) && (\text{fの定義による}) \\
 &= \neg(T \wedge (f(\lceil F \rceil, T) \vee f(\lceil X \rceil, T))) && (\text{fの定義による}) \\
 &= \neg(T \wedge (F \vee T)) && (\text{fの定義による}) \\
 &\Leftrightarrow F
 \end{aligned}$$

(c) $g(\lceil (T \wedge X) \vee \neg T \rceil)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{aligned}
 g(\lceil (T \wedge X) \vee \neg T \rceil) &= \lceil (g(\lceil T \wedge X \rceil) \wedge g(\lceil \neg T \rceil)) \rceil && (\text{gの定義による}) \\
 &= \lceil ((g(\lceil T \rceil) \vee g(\lceil X \rceil)) \wedge T) \rceil && (\text{gの定義による}) \\
 &= \lceil ((F \vee \neg X) \wedge T) \rceil && (\text{gの定義による})
 \end{aligned}$$

(d) $g(\lceil \neg(T \wedge (F \vee X)) \rceil)$ の値を求めよ。

答.

$$g(\lceil \neg(T \wedge (F \vee X)) \rceil) = \lceil (T \wedge (F \vee X)) \rceil \quad (\text{gの定義による})$$

(e) 任意の論理式 $e \in E$ と真理値 $b \in V$ について $\neg f(e, b) \Leftrightarrow f(g(e), b)$ であることを証明しなさい。

答. 論理式 e に関する帰納法で証明する。

• case $e = \lceil X \rceil$:

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \neg f(\lceil X \rceil, b) = \neg b && (\text{fの定義による}) \\
 (\text{右辺}) &= f(g(\lceil X \rceil), b) = f(\lceil \neg X \rceil, b) && (\text{gの定義による}) \\
 &= \neg f(\lceil X \rceil, b) && (\text{fの定義による}) \\
 &= \neg b && (\text{fの定義による}) \\
 &= (\text{左辺})
 \end{aligned}$$

• case $e = \lceil T \rceil$:

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \neg f(\lceil T \rceil, b) = \neg T && (\text{fの定義による}) \\
 &\Leftrightarrow F \\
 (\text{右辺}) &= f(g(\lceil T \rceil), b) = f(\lceil F \rceil, b) && (\text{gの定義による}) \\
 &= F && (\text{fの定義による}) \\
 &= (\text{左辺})
 \end{aligned}$$

• case $e = \lceil F \rceil$:

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \neg f(\lceil F \rceil, b) = \neg F && (\text{fの定義による}) \\
 &\Leftrightarrow T \\
 (\text{右辺}) &= f(g(\lceil F \rceil), b) = f(\lceil T \rceil, b) && (\text{gの定義による}) \\
 &= T && (\text{fの定義による}) \\
 &= (\text{左辺})
 \end{aligned}$$

- case $e = \lceil \neg e_1 \rceil$:

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = \neg f(\lceil \neg e_1 \rceil, b) &= \neg \neg f(e_1, b) \quad (\text{fの定義による}) \\ &\Leftrightarrow f(e_1, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) = f(g(\lceil \neg e_1 \rceil), b) &= f(e_1, b) \quad (\text{gの定義による}) \\ &= (\text{左辺}) \end{aligned}$$

- case $e = \lceil e_1 \wedge e_2 \rceil$: 帰納法の仮定より、 $\neg f(e_1, b) \Leftrightarrow f(g(e_1), b)$ かつ $\neg f(e_2, b) \Leftrightarrow f(g(e_2), b)$ である。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = \neg f(\lceil e_1 \wedge e_2 \rceil, b) &= \neg(f(e_1, b) \wedge f(e_2, b)) \quad (\text{fの定義による}) \\ &\Leftrightarrow \neg f(e_1, b) \vee \neg f(e_2, b) \\ &\Leftrightarrow f(g(e_1), b) \vee f(g(e_2), b) \quad (\text{帰納法の仮定による}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) = f(g(\lceil e_1 \wedge e_2 \rceil), b) &= f(\lceil (g(e_1) \vee g(e_2)) \rceil, b) \quad (\text{gの定義による}) \\ &= f(g(e_1), b) \vee f(g(e_2), b) \quad (\text{fの定義による}) \\ &\Leftrightarrow (\text{左辺}) \end{aligned}$$

- case $e = \lceil e_1 \vee e_2 \rceil$: 帰納法の仮定より、 $\neg f(e_1, b) \Leftrightarrow f(g(e_1), b)$ かつ $\neg f(e_2, b) \Leftrightarrow f(g(e_2), b)$ である。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = \neg f(\lceil e_1 \vee e_2 \rceil, b) &= \neg(f(e_1, b) \vee f(e_2, b)) \quad (\text{fの定義による}) \\ &\Leftrightarrow \neg f(e_1, b) \wedge \neg f(e_2, b) \\ &\Leftrightarrow f(g(e_1), b) \wedge f(g(e_2), b) \quad (\text{帰納法の仮定による}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) = f(g(\lceil e_1 \vee e_2 \rceil), b) &= f(\lceil (g(e_1) \wedge g(e_2)) \rceil, b) \quad (\text{gの定義による}) \\ &= f(g(e_1), b) \wedge f(g(e_2), b) \quad (\text{fの定義による}) \\ &\Leftrightarrow (\text{左辺}) \end{aligned}$$

(f) 任意の論理式 $e \in E$ と真理値 $b \in V$ について $f(e, b) \Leftrightarrow f(g(g(e)), b)$ であることを証明しなさい。

答.

$$\begin{aligned} f(e, b) &\Leftrightarrow \neg f(g(e), b) \quad ((e) \text{ で証明した定理による}) \\ &\Leftrightarrow \neg \neg f(g(g(e)), b) \quad ((e) \text{ で証明した定理による}) \\ &\Leftrightarrow f(g(g(e)), b) \end{aligned}$$