『離散構造』 6 章の例題の解答例
亀山

問 1 (集合の帰納的定義) $\{L, R, 0, 1, +\}$ 上の文字列を考える．ただし，L は左括弧 “(“ をあらわし，R は右括弧 “)” を表す．この文字列の集合 D を，以下のように帰納的に定義する．

(D1) $0 \in D$.

(D2) $1 \in D$.

(D3) $s \in D \Rightarrow LsR \in D$.

(D4) $s \in D \wedge t \in D \Rightarrow s + t \in D$.

(a) 文字列 $0+1+0$ が，集合 D の要素であることを示してみよう．まず，(D1) より $0 \in D$ である．また，(D2) より $1 \in D$ である．これらと，(D4) より，$0 + 1 \in D$ である．さらに，(D4) を使って，$0 + 1 + 0 \in D$ である．

(b) 文字列 $0 + 1 + 0$ が集合 D の要素であることを示す方法は，上記の手順以外にもある．それを示せ．(このように 2 通り以上の方法で同じ文字列が導出できるとき，曖昧な文法であるという．)

(答) まず，(D2) より $1 \in D$ である．また，(D1) より $0 \in D$ である．これらと，(D4) より，$1 + 0 \in D$ である．さらに，(D4) を使って，$0 + 1 + 0 \in D$ である．

(c) 文字列 $LL1RR$ が，集合 D の要素であるかどうか，理由をつけて示せ．

(答) YES. まず，(D2) より $1 \in D$ である．また，(D3) より $L1R \in D$ である．さらに，(D3) を使って，$LL1RR \in D$ である．

(d) 文字列 $L0RR + LL1R$ が，集合 D の要素であるかどうか，理由をつけて示せ．

(インフォーマルな答) NO. 直感的な理由としては「かっこが整合しない」からである。(L は開き括弧、R は閉じ括弧であることに注意。)

ただ、このことを厳密に示すのは、かなり大変である。つまり、「どういう風に導出しても、 $L0RR + LL1R$ が，集合 D の要素であることを導けない」ということを示す必要があるからである。「導出方法」は無限にたくさんあるので、これは、単純な話ではない。

(きちんとした証明: これは、難しいので、今回の授業で完全に理解する必要はない。)

文字列 $L0RR + LL1R$ が，集合 D の要素であることを導出できたと仮定する。(ここから矛盾を導くのが目標である。) その導出の最後に使った規則は、(D3) か (D4) である。

Case-1 (最後に D3 を使った場合) (D3) を使う直前では、$0RR + LL1$ が D の要素であることが導けているはずである。これの導出の最後は、(D4) しかあり得ない。そして、(D4) の直前は、$0RR$ と $LL1$ が D の要素であることが導けていたはずである。しかし、$0RR$ を導くことはどうやってもできない。(その導出の最後が、(D1),(D2),(D3),(D4) のどれだとしても矛盾する。) よって矛盾する。

Case-2 (最後に D4 を使った場合) (D4) を使う直前では、$L0RR$ と $LL1R$ が，集合 D の要素であることを導出できたはずである。$L0RR$ に着目すると、それが D の要素であることを示したときの最後に使ったルールは、(D3) のはずである。そして (D3) の直前は、$0R$ が D の要素であることがわかっていたはずである。しかし、(D1),(D2),(D3),(D4) のどれを使っても $0R \in D$ は導けない。よって矛盾である。

以上により、どのケースでも矛盾したので、最終的に、$L0RR + LL1R$ が集合 D の要素であるという仮定が間違いであったことがわかる。(証明終わり)

(e) この文法を曖昧でないものにする (D に属するどの文字列も，唯 1 つの方法で導けるようにする) には，D の定義をどう変更したらよいか？

(答) この解答は 1 つではない。一例を以下に示す。

(D1) $0 \in D$.

(D2) $1 \in D$.

(D3) $s \in D \Rightarrow LsR \in D$.

(D4) $s \in D \Rightarrow s + 0 \in D$.

(D5) $s \in D \Rightarrow s + 1 \in D$.

(D6) $s \in D \wedge t \in D \Rightarrow s + LtR \in D$.

このやりかたは、$s + t$ の構成のときの t として、0 か 1 か LuR の形のものだけを許す ($v + w$ の形は許さない) というアイディアに基づいている。この場合、+ の記号は、左側が優先される。たとえば、$0 + 0 + 0$ は $(0 + 0) + 0$ の意味になる。このようなとき、「+ が左結合的 (left associative)」という。

問 2 (関数の帰納的定義) リストを反転する関数 $\texttt{reverse}$: $List_A \to List_A$ の定義を与えよ．たとえば，$\texttt{reverse}(\langle 1, 2, 3\rangle) = \langle 3, 2, 1\rangle$ となる．

(答)

$$\texttt{reverse}(L) = \begin{cases} \langle\rangle & \text{if } L = \langle\rangle \\ \texttt{reverse}(L') \oplus \langle x\rangle & \text{if } L = \mathrm{cons}(x, L') \end{cases}$$

ここで、$\texttt{reverse}(L') \oplus \langle x\rangle$ で使っている $\oplus$ は 2 つのリストを連接する関数 (append 関数) である。また、$\texttt{reverse}(L') \oplus \langle x\rangle$ を $\texttt{reverse}(L') \oplus x$ としてはいけないし、$\texttt{reverse}(L') :: x$ としてもいけない。(これらは、いずれも、リストが来るべき場所に、要素が来てしまっている。)

(計算例)

$$\begin{aligned} \texttt{reverse}(\langle 1, 2\rangle) &= \texttt{reverse}(\langle 2\rangle) \oplus \langle 1\rangle \\ &= (\texttt{reverse}(\langle\rangle) \oplus \langle 2\rangle) \oplus \langle 1\rangle \\ &= (\langle\rangle \oplus \langle 2\rangle) \oplus \langle 1\rangle \\ &= \langle 2\rangle \oplus \langle 1\rangle \\ &= \langle 2, 1\rangle \end{aligned}$$

問 3 (リストに関する帰納法) 任意のリスト x, y, z に対して，

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

が成立することを x に関する帰納法を用いて証明せよ．ただし，$\oplus$ はリストを連結する関数である．

(答) 上記の式を (式 1) と呼び、これをリスト x に関する帰納法で証明する。

(Case: $x = \langle\rangle$ のとき)

(式 1) の左辺は、 $(\langle\rangle \oplus y) \oplus z = y \oplus x$ となる ($\oplus$ の定義により。) 一方、(式 1) の右辺は、 $\langle\rangle \oplus (y \oplus z) = y \oplus x$ となる。($\oplus$ の定義により。) よって、両辺は等しく、(式 1) が成立する。

(Case: $x = \mathrm{cons}(u, L)$ のとき)

$x = L$ に対して、式 1 が成立すると仮定して、$x = \mathrm{cons}(u, L)$ に対して、式 1 が成立することを証明したい。

仮定を書きなおすと、

$$(L \oplus y) \oplus z = L \oplus (y \oplus z)$$

である。

$$\begin{aligned} x = \mathrm{cons}(u, L) \text{ の時の式 1 の左辺} &= (\mathrm{cons}(u, L) \oplus y) \oplus z \\ &= \mathrm{cons}(u, (L \oplus y)) \oplus z \\ &= \mathrm{cons}(u, (L \oplus y) \oplus z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = \mathrm{cons}(u, L) \text{ の時の式 1 の右辺} &= \mathrm{cons}(u, L) \oplus (y \oplus z) \\ &= \mathrm{cons}(u, (L \oplus (y \oplus z))) \end{aligned}$$

上記の「仮定」をつかうと、左右両辺は一致していることがわかる。

よって、$x = L$ に対して、式 1 が成立すると仮定して、$x = \mathrm{cons}(u, L)$ に対して、式 1 が成立することを証明できた。

以上の 2 つの Case よりリストに関する帰納法をつかって、(式 1) が任意のリスト x に対して成立することがいえた。(証明終わり)