『離散構造』5 章 (グラフと木) の演習問題

出題: 2013 年 11 月 22 日

期限: 2013 年 12 月 06 日の授業

問題 1 (無向グラフ)

$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ を自然数の集合とし、無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid (x-5)^2 + (y-5)^2 \leq 25 \land x \leq 10 \land y \leq 10\}$,
- V の要素集合 $\langle x_1, y_1\rangle$ と $\langle x_2, y_2\rangle$ の間に辺があることの必要十分条件は

$$|x_1 - 5| + |y_1 - 5| = |x_2 - 5| + |y_2 - 5| \land |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 2.$$

(a) 頂点 $\langle 1, 7\rangle$ と $\langle 10, 5\rangle$ の次数をそれぞれ求めよ。

(b) 頂点 $\langle 5, 10\rangle$ から $\langle 3, 2\rangle$ への道があるか調べ、ある場合はそのような道の中で最短のものを求めよ。

(c) グラフ G_1 のサイズ (辺の本数) を求めよ。

(d) グラフ G_1 の位数 (頂点の数) を求めよ。

(e) グラフ G_1 の閉路のうち、単純道 (同じ辺を通らない道) であるものの個数を求めよ。

(f) グラフ G_1 の連結成分の個数を求めよ。

(g) 2 つの頂点 v_1 と v_2 を結ぶ道の長さの最小値を v_1 と v_2 の距離といい、グラフ中の任意の 2 頂点間距離の最大値をグラフの直径という。G_1 の直径を求めよ。

問題 2 (有向グラフ)

集合 $A = \{x \in \mathcal{N} \mid x \leq 10\}$ とし、有向グラフ G_2 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = 2^A$,
- 辺の集合 $E = \{\langle x, y\rangle \in V \times V \mid \exists z \in A.(x \cup \{z\} = y)\}$.

(a) 頂点 $\{1, 3, 9\}$ と $\{2, 5, 7, 9, 10\}$ の出次数と入次数をそれぞれ求めよ。

(b) 頂点 $\{3, 4, 8\}$ から $\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ への単純道の個数を求めよ。

(c) グラフ G_2 において最長の単純道の長さを求めよ。

問題 3 (木に関する証明)

(a) 木のどの 2 つの頂点間に辺を追加しても閉路ができることを示しなさい。

(b) 上のようにしてできた閉路のどの辺を取り除いても木になることを示しなさい。