

『離散構造』5章(グラフと木)の演習問題 解答例 (海野)

問題 1 (無向グラフ)

$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ を自然数の集合とし、無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid (x - 5)^2 + (y - 5)^2 \leq 25 \wedge x \leq 10 \wedge y \leq 10\}$,
- V の要素集合 $\langle x_1, y_1 \rangle$ と $\langle x_2, y_2 \rangle$ の間に辺があることの必要十分条件は

$$|x_1 - 5| + |y_1 - 5| = |x_2 - 5| + |y_2 - 5| \wedge |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 2.$$

解答準備. グラフ G_1 を図示すると図1のようになる。このような図を作るにあたって、 G_1 の定義より辺が、頂点 $\langle 5, 5 \rangle$ からのマンハッタン距離¹が同じ頂点同士にしかはられていないことと、例えば頂点 $\langle 4, 9 \rangle$ から $\langle 6, 9 \rangle$ への辺のように、 $\langle 5, 10 \rangle$ を通らないショートカットが存在することに注意してほしい。(このショートカットのせいで、グラフが複雑になって不必要に難しい問題になってしまった。)

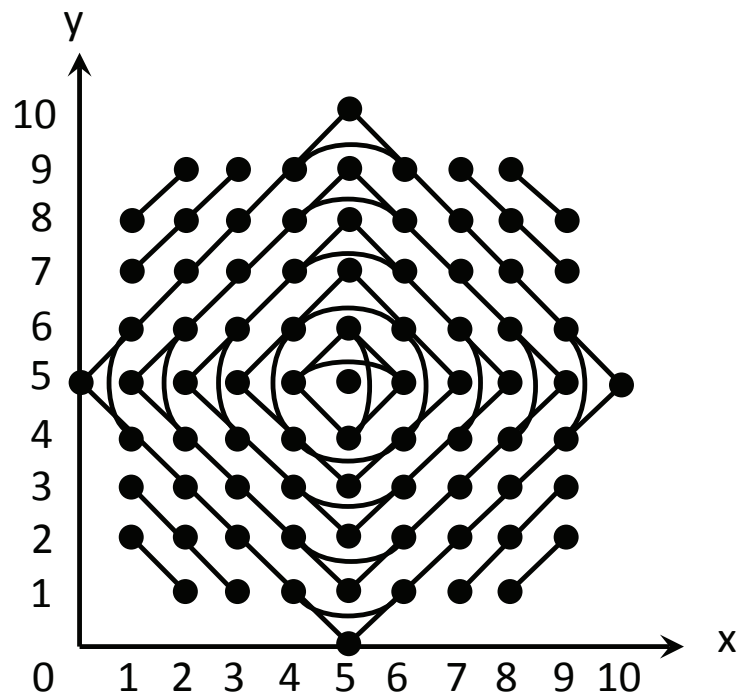


図 1: グラフ G_1

¹マンハッタンのように正方形のブロックに区分された都市で、2点間の距離を、東西方向のブロック数と南北方向のブロック数の和としてはかったもの

- (a) 頂点 $\langle 1, 7 \rangle$ と $\langle 10, 5 \rangle$ の次数をそれぞれ求めよ。

答. 図 1 を調べると、頂点 $\langle 1, 7 \rangle$ の次数は 1、頂点 $\langle 10, 5 \rangle$ の次数は 2 であることがわかる。

- (b) 頂点 $\langle 5, 10 \rangle$ から $\langle 3, 2 \rangle$ への道があるか調べ、ある場合はそのような道の中で最短のものを求めよ。

答. 頂点 $\langle 1, 6 \rangle$ から $\langle 1, 4 \rangle$ へのショートカットがあることに注意しながら図 1 を調べると、

$$\langle \langle 5, 10 \rangle, \langle 4, 9 \rangle, \langle 3, 8 \rangle, \langle 2, 7 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \rangle$$

が頂点 $\langle 5, 10 \rangle$ から $\langle 3, 2 \rangle$ への最短の道であることが分かる。この道の長さは 7 である。

- (c) グラフ G_1 のサイズ (辺の本数) を求めよ。

答. 図 1 の辺の本数を数えると、 G_1 のサイズは $18 \cdot 4 \text{ 方向} + 9 \cdot 2 \text{ 方向} = 72 + 18 = 90$ である。

- (d) グラフ G_1 の位数 (頂点の数) を求めよ。

答. 図 1 の頂点の数を数えると、 G_1 の位数は 81 である。

- (e) グラフ G_1 の閉路のうち、単純道 (同じ辺を通らない道) であるものの個数を求めよ。

答. [演習中の答えと異なるので注意してください。]

$\langle 5, 5 \rangle$ からのマンハッタン距離が 5 である連結成分に含まれる閉路としては、まず、3 頂点からなる閉路が 4 つ存在する。4 頂点以上からなる閉路としては、四隅のショートカットをそれぞれ使うかどうかを考慮すると $2^4 = 16$ 個見つけることができる。つまり、合計で 20 個存在する。マンハッタン距離が 4, 3 の連結成分にもそれぞれ 20 個ずつ閉路が含まれる。マンハッタン距離が 2 の連結成分に含まれる閉路を数えると $16 + 4 + 4 + 4 + 1 = 29$ 個ある。マンハッタン距離が 1 の連結成分に含まれる閉路を数えると 7 個あるので、全体では、 $20 \cdot 3 + 29 + 7 = 96$ 個の閉路がある。

- (f) グラフ G_1 の連結成分の個数を求めよ。

答. $\langle 5, 5 \rangle$ からのマンハッタン距離が 7 と 6 の連結成分が 4 つずつ、5, 4, 3, 2, 1, 0 の連結成分がそれぞれ 1 つずつ存在するので、全体では、 $4 \cdot 2 + 6 = 14$ 個の連結成分が存在する。ここで、マンハッタン距離が 0 の連結成分は、頂点 1 個だけからなるグラフだが、ここではそれも連結成分にカウントしていることに注意してほしい。

- (g) 2 つの頂点 v_1 と v_2 を結ぶ道の長さの最小値を v_1 と v_2 の距離といい、グラフ中の任意の 2 頂点間距離の最大値をグラフの直径という。 G_1 の直径を求めよ。

答. [2013/12/6 修正] グラフは非連結なので、道が存在しない 2 頂点があり、それらの間の距離は ∞ である。したがって、直径も ∞ であると答えるのが正しい。しかし、演習中の解答では、連結成分内の 2 頂点間の距離の最大値として直径を求めてしまった。2010 年の演習問題にも同様の間違いがあり、修正されているので、それを参考にする場合は注意してほしい。頂点 $\langle 5, 10 \rangle$ から $\langle 5, 0 \rangle$ への距離は 9 であり、それがこのグラフの距離の最大値なので、 G_1 の直径は 9 である。

問題 2 (有向グラフ)

集合 $A = \{x \in \mathcal{N} \mid x \leq 10\}$ とし、有向グラフ G_2 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = 2^A$,
- 辺の集合 $E = \{\langle x, y \rangle \in V \times V \mid \exists z \in A. (x \cup \{z\} = y)\}$.

- (a) 頂点 $\{1, 3, 9\}$ と $\{2, 5, 7, 9, 10\}$ の出次数と入次数をそれぞれ求めよ。

答. 辺の集合の定義より、すべての $z \in A \setminus \{1, 3, 9\}$ について、頂点 $\{1, 3, 9\}$ から $\{1, 3, 9\} \cup \{z\}$ への辺が存在する。また、 $\{1, 3, 9\} \cup \{1\} = \{1, 3, 9\}$ なので、頂点 $\{1, 3, 9\}$ から $\{1, 3, 9\}$ への辺も存在する。

したがって、頂点 $\{1, 3, 9\}$ の出次数は $|A \setminus \{1, 3, 9\}| + 1 = 9$ である。頂点 $\{1, 3, 9\}$ に入ってくる辺の数は、 $\{1, 3, 9\}$ から $\{1, 3, 9\}$ への辺もあるので、 $|\{1, 3, 9\}| + 1 = 4$ である。

$\{2, 5, 7, 9, 10\}$ の出次数と入次数を同様に数えると、それぞれ $|A \setminus \{2, 5, 7, 9, 10\}| + 1 = 7$ と $|\{2, 5, 7, 9, 10\}| + 1 = 6$ になる。

- (b) 頂点 $\{3, 4, 8\}$ から $\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ への単純道の個数を求めよ。

答. 頂点 $\{3, 4, 8\}$ から $\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ への最短の単純道は $|\{1, 3, 4, 5, 7, 8\} \setminus \{3, 4, 8\}|! = 3! = 6$ 個あり、その長さは3である。しかし、各単純道上にある4つの頂点 v すべてにおいて、 v から v への辺をたどることができるので、頂点 $\{3, 4, 8\}$ から $\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ への単純道の個数は $6 \cdot 2^4 = 96$ である。

- (c) グラフ G_2 において最長の単純道の長さを求めよ。

答. 頂点 $\emptyset$ から頂点 A への単純道のうち、 $\emptyset$ 以外の $|A|$ 個の頂点 v すべてにおいて、 v から v への辺をたどることができ、そのようなものが最長の単純道である。その長さを計算すると $|A| + |A| = 22$ である。

問題 3 (木に関する証明)

- (a) 木のどの2つの頂点間に辺を追加しても閉路ができることを示しなさい。

- (b) 上のようにしてできた閉路のどの辺を取り除いても木になることを示しなさい。

答. 演習中には直感的な説明しかしていないので、ここではもう少し厳密な証明を行う。しかし、難しいので、無理に理解しようとしなくても良い。

木の、新しく辺を追加した2つの頂点を v_0 と w_0 、木の根を r とする (図2参照)。 $v_0 = w_0$ の場合は自明なので、以下では $v_0 \neq w_0$ の場合を考える。まず (a) を証明しよう。木の定義により、頂点 v_0 から根 r への単純道 $\langle v_0, v_1, \dots, v_m \rangle$ (ただし $v_m = r$) が唯一存在する。同様に、頂点 w_0 から根 r への単純道 $\langle w_0, w_1, \dots, w_n \rangle$ (ただし $w_n = r$) も唯一存在する。それぞれの単純道が唯一存在することから、ある $i \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$ (ただし ℓ は m と n の最小値) が存在して、 $\langle v_{m-i}, \dots, v_m \rangle = \langle w_{n-i}, \dots, w_n \rangle$ かつ $v_0, \dots, v_{m-i-1}, w_0, \dots, w_{n-i-1}$ はすべて互いに異なる頂点になる。すると、

$$\langle v_0, \dots, v_{m-i-1}, v_{m-i}, w_{n-i-1}, \dots, w_0, v_0 \rangle$$

は同じ辺を2回以上たどらない閉路になっている。

次に (b) の証明のスケッチを載せる。図2において、 v_{m-i} より下にある任意の頂点 v を選ぶと、 v から根 r にいたる単純道がちょうど2つ存在することがいえる。また、上で構成した閉路のどの辺を取り除いても、根 r にいたる2つの単純道のうち片方がなくなり、もう片方だけが残ることがいえる。したがって、どの辺を取り除いても、すべての頂点について、根にいたる単純道が唯一存在することになり、定義よりそのようなグラフは木である。

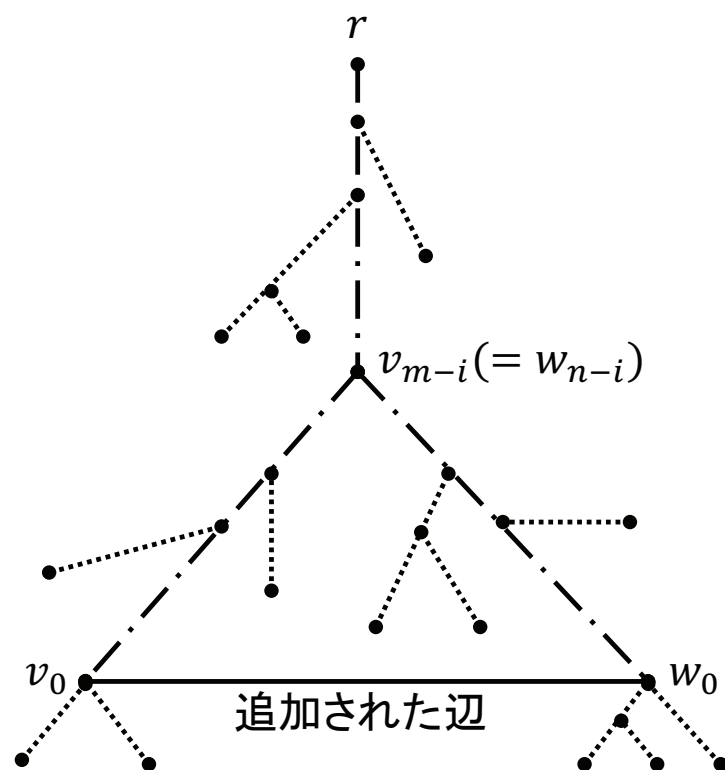


図 2: 木の 2 つの頂点間に辺を追加して得られたグラフ