

『離散構造』4章(関係)の演習問題 解答例 (海野)

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。 $\mathcal{N}_{10}$ 上の2項関係 $R_1, \dots, R_3$ を以下のように定める。

$$x R_1 y \Leftrightarrow y = x + 1$$

$$x R_2 y \Leftrightarrow x^2 \leq y$$

$$x R_3 y \Leftrightarrow x \text{ は } y \text{ の約数}$$

ただし、任意の自然数は0の約数とする。[2013/11/14 「0は任意の自然数の約数」と間違っていたのを修正]

問題 1 (関係の性質)

- (a) R_1 が反射的、対称的、推移的、反対称的であることをそれぞれ答えよ。

答. $0 R_1 0$ でないので R_1 は反射的でない。 $0 R_1 1$ だが $1 R_1 0$ ではないので R_1 は対称的でない。 $0 R_1 1$ かつ $1 R_1 2$ だが $0 R_1 2$ ではないので R_1 は推移的でない。 $x R_1 y$ かつ $y R_1 x$ となる $x, y \in \mathcal{N}_{10}$ は存在しないので R_1 は反対称的である。

- (b) R_2 について同様のことを答えよ。

答. $2 R_2 2$ でないので R_2 は反射的でない。 $2 R_2 4$ だが $4 R_2 2$ でないので R_2 は対称的でない。 R_2 が推移的であることを示すために、 $x, y, z \in \mathcal{N}_{10}$ が $x R_2 y$ かつ $y R_2 z$ だと仮定する。 R_2 の定義より、 $x^2 \leq y$ かつ $y^2 \leq z$ である。これらから $x^2 \leq x^4 \leq y^2 \leq z$ が導けるので、 $x R_2 z$ である。したがって、 R_2 は推移的である。次に、 R_2 が反対称的であることを示すため、 $x, y \in \mathcal{N}_{10}$ が $x R_2 y$ かつ $y R_2 x$ だと仮定する。 R_2 の定義より、 $x^2 \leq y$ かつ $y^2 \leq x$ である。これらから、 $x \leq x^2 \leq y$ かつ $y \leq y^2 \leq x$ が導け、 $x = y$ が成り立つ。したがって、 R_2 は反対称的である。

- (c) R_3 について同様のことを答えよ。

答. すべての $x \in \mathcal{N}_{10}$ について、 x は x 自身の約数なので R_3 は反射的である。 2 は 4 の約数だが、 4 は 2 の約数ではないので R_3 は対称的でない。すべての $x, y, z \in \mathcal{N}_{10}$ について、 x が y の約数かつ y が z の約数ならば、 x は z の約数でもある。したがって R_3 は推移的である。すべての $x, y \in \mathcal{N}_{10}$ について、 x が y の約数かつ y が x の約数ならば $x = y$ である。したがって、 R_3 は反対称的である。

	反射的	対称的	推移的	反対称的
R_1				✓
R_2			✓	✓
R_3	✓		✓	✓

問題 2 (関係の合成)

- (a) $R_1 \circ R_1$ の要素をすべて書き下しなさい。

答. R_1 と $R_1 \circ R_1$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} R_1 &= \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \langle 6, 7 \rangle, \langle 7, 8 \rangle, \langle 8, 9 \rangle\} \\ R_1 \circ R_1 &= \{\langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 5, 7 \rangle, \langle 6, 8 \rangle, \langle 7, 9 \rangle\} \end{aligned}$$

(b) $R_2 \circ R_2$ の要素をすべて書き下しなさい。

答. R_2 と $R_2 \circ R_2$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} R_2 &= \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \dots, \langle 0, 9 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots, \langle 1, 9 \rangle, \\ &\quad \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \dots, \langle 2, 9 \rangle, \\ &\quad \langle 3, 9 \rangle\} \\ R_2 \circ R_2 &= \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \dots, \langle 0, 9 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots, \langle 1, 9 \rangle\} \end{aligned}$$

(c) $R_3 \circ R_2$ の要素をすべて書き下しなさい。

答. R_3 と $R_3 \circ R_2$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} R_3 &= \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \dots, \langle 9, 0 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 1 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 5 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 7 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 8 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \\ &\quad \langle 1, 9 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 9, 9 \rangle\} \\ R_3 \circ R_2 &= \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10} \mid \exists z (x \text{ は } z \text{ の約数} \wedge z^2 \leq y)\} \\ &\supset \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10} \mid x \text{ は } 0 \text{ の約数} \wedge 0 \leq y\} \\ &= \mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10} \end{aligned}$$

$R_3 \circ R_2 \subset \mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10}$ でもあるので、 $R_3 \circ R_2 = \mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10}$ である。

問題 3 [2013/11/14 $\mathcal{N}_{10}$ となっていたのを $\mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10}$ に修正]

(a) R_1 を含む $\mathcal{N}_{10}$ 上の 2 項関係のうち、推移的であり $\emptyset$ とも $\mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10}$ とも異なるものがあれば求めなさい。

答. $x R y \Leftrightarrow x < y$ のように 2 項関係 R を定義する。 $\forall x, y \in \mathcal{N}_{10} (y = x + 1 \Rightarrow x < y)$ なので $R_1 \subset R$ である。また、すべての $x, y, z \in \mathcal{N}_{10}$ について、 $x < y$ かつ $y < z$ ならば $x < z$ なので R は推移的である。

R_1 を含む推移的である R のような関係のうち、最小のものを R_1 の推移閉包 (transitive closure) という。実は、 R は R_1 の推移閉包になっている。(R が最小であることの証明はここでは省略。)

(b) R_2 を含む $\mathcal{N}_{10}$ 上の 2 項関係のうち、半順序であり $\mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10}$ と異なるものがあれば求めなさい。

答. $x R y \Leftrightarrow x R_2 y \vee x = y$ のように 2 項関係 R を定義する。 $R_2 \subset R$ であり、 R は明らかに反射的である。 R が推移的であることを示すために、 $x, y, z \in \mathcal{N}_{10}$ について $x R y$ かつ $y R z$ が成り立つと仮定する。 R の定義より、 $(x R_2 y \vee x = y) \wedge (y R_2 z \vee y = z)$ が成り立つ。これは $x R_2 y \wedge y R_2 z \vee x R_2 z \vee x = z$ を含意し、 R_2 が推移的であることも使えば、 $x R_2 z \vee x = z$ であることが導ける。したがって、 $x R z$ であり、 R は推移的である。次に、 R が反対称的であることを示すため、 $x, y \in \mathcal{N}_{10}$ について、 $x R y$

かつ $y R x$ だと仮定する。 R の定義より、 $(x R_2 y \vee x = y) \wedge (y R_2 x \vee y = x)$ が成り立つ。この条件は $x R_2 y \wedge y R_2 x \vee x = y$ を含意するので、 R_2 が反対称的であることも使えば、 $x = y$ であることが導ける。したがって、 R は反対称的である。以上より、 R が半順序であることが示せた。(ちなみに、 $\leq$ でも題意を満たす。)

この R や $\leq$ のような R_2 を含み反射的である関係のうち、最小のものを R_2 の反射閉包 (reflexive closure) という。実は、 R は R_2 の反射閉包になっている。 $(R$ が最小であることの証明はここでは省略。) 一方、 $\leq$ は、最小であるという条件を満たさないので R_2 の反射閉包ではない。実際、 $\forall x, y \in \mathcal{N}_{10}(x R y \Rightarrow x \leq y)$ だが、 $\forall x, y \in \mathcal{N}_{10}(x \leq y \Rightarrow x R y)$ は成り立たないので ($x = 2, y = 3$ が反例)、 $\leq$ は R を真に包含する関係であり、最小ではない。

- (c) R_3 を含む $\mathcal{N}_{10}$ 上の 2 項関係のうち、同値関係であり $\mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10}$ と異なるものがあれば求めなさい。

答. 関係 R は、同値関係であり、 $R_3 \subset R$ を満たすとする。 R_3 の定義より、 $\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \dots, \langle 9, 0 \rangle\} \subset R_3 \subset R$ である。すると、 R は対称的なので、 $\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \dots, \langle 0, 9 \rangle\} \subset R$ も成り立つ。つまり、 $\forall x, y \in \mathcal{N}_{10}(x R 0 \wedge 0 R y)$ が成り立つ。ここで、 R が推移的であることを使うと、 $\forall x, y \in \mathcal{N}_{10}(x R y)$ が導け、これは $\mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10} \subset R$ を含意する。したがって、 R_3 を含む $\mathcal{N}_{10}$ 上の同値関係で $\mathcal{N}_{10} \times \mathcal{N}_{10}$ と異なるものは存在しない。