『離散構造』 3章演習問題 (亀山)

この問題では、$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \le x < n\}$ とする。(n は $\mathcal{N}_n$ の要素でないことに注意)

問 1 (関数の個数) $f : \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_3$ となる関数 f もしくは $g ; \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_3$ となる部分関数 g で、以下の条件を満たすものの個数を示せ。

(a) f は全射。

(b) $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$.

(c) $(f \circ f) \circ f = f$.

(d) すべての $x \in \mathcal{N}_3$ に対して,「$g(x)$ が定義されていれば，$x \le g(x)$ となる」.

(e) すべての $x \in \mathcal{N}_3$ に対して,「$g(x)$ が定義されていれば，$f(x) = g(x)$ となる」という条件を満たす f, g の組. (f, g のどちらか一方でも違う組み合わせは，違う組として数える．)

問 2 (関数の性質)
定数 a, b, c は $0 \le a, b, c < 13$ とする．関数 $f_{a,b,c} : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ を，$f_{a,b,c}(x) = (ax^2 + bx + c) \mod 13$ と定める．ただし， $\mod$ は，整数上の割り算の余りを求める演算子とする。

(a) $a = 0, b = 3, c = 2$ のとき，$f_{a,b,c}$ は全射か，また，単射か.

(b) $a = 1, b = 0, c = 2$ のとき，$f_{a,b,c}$ による集合 $\{1, 12\}$ の像を求めよ.

(c) $a = 0, b = 0$ のとき (c は固定しない)，$f_{a,b,c}$ が全単射であることを示せ．また，その逆関数はどのような関数か.

(d) $a = 0, c = 0$ のとき (b は固定しない)，$f_{a,b,c}$ が全単射であることを示せ．また，その逆関数はどのような関数か.

(e) $a = 1, c = 0$ のとき (b は固定しない)，$f_{a,b,c}$ が全単射になることがあるか.

(f) $f_{a,b,c}$ が全単射になるための必要十分条件を求め，なる場合はその逆関数を求めよ.

問 3 (関数の性質) (a) 関数 $f : S \to T$ と $g : T \to U$ に対して，$g \circ f$ が単射であれば，f も単射であることを示しなさい.

(b) また，$g \circ f$ が単射であっても，g の方は，必ずしも単射とは限らないことを示しなさい.

問 4 (関数プログラミング; 発展課題 [余力がある人のみ])
以下の条件をすべて満たす関数 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ が存在するか調べよ。

(a) $x \ge 101$ となる任意の x に対して、$f(x) = x - 10$.

(b) $x \le 100$ となる任意の x に対して、$f(x) = f(f(x + 11))$.