『離散構造』 3章 演習問題 解答例 (亀山)

この問題では、$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \le x < n\}$ とする。(n は $\mathcal{N}_n$ の要素でないことに注意)

問 1 (関数の個数) $f : \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_3$ となる関数 f もしくは $g ; \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_3$ となる部分関数 g で、以下の条件を満たすものの個数を示せ。

(a) f は全射。

答 f が全射であるとき，$\{f(0), f(1), f(2)\} = \mathcal{N}_3$ であるので，$f(i)$ は互いに相異なる値である．よって，その総数は，$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 個である．

(b) $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$.

答 $f(\{0,1\})$ は 集合 $\{0,1\}$ の f による像であり，$\{f(0), f(1)\}$ と一致する．よって，$f(0) = 0$,$f(1) = 1$ であるかその逆かの 2 通りある．また，$f(2)$ はそれらとは独立にどの値でも取ることができるので，3 通りある．これらをかけあわせて，答えは 6 個である．

(c) $(f \circ f) \circ f = f$.

答 この問題にエレガントな解答は (おそらく) なく，丹念にかぞえるしかない．

演習の際に黒板でやったように分類することにする。

- $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = c$ となるパターンは 1 通り、条件を満たす。
- $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = c$ となるパターンは 6 通り、条件を満たす。
- $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c$ となるパターンは 3 通り、条件を満たす。
- $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = a$ となるパターンは 6 通り、条件を満たす。
- $f(a) = c, f(b) = c, f(c) = c$ となるパターンは 3 通り、条件を満たす。
- $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = c$ となるパターンは 6 通り、条件を満たさない。
- $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ となるパターンは 2 通り、条件を満たさない。

以上より、条件を満たす f は 19 個ある。

(d) すべての $x \in \mathcal{N}_3$ に対して,「$g(x)$ が定義されていれば，$x \le g(x)$ となる」.

答 $g(0)$ の値は，定義されていないか，$0, 1, 2$ のいずれかで 4 通りである．$g(1)$ の値は，定義されていないか，$1, 2$ のいずれかで 3 通りである．$g(2)$ の値は，定義されていないか，2 のいずれかで 2 通りである．これらは独立であるため，全部かけあわせて，24 通りある．

(e) すべての $x \in \mathcal{N}_3$ に対して,「$g(x)$ が定義されていれば，$f(x) = g(x)$ となる」という条件を満たす f, g の組. (f, g のどちらか一方でも違う組み合わせは，違う組として数える．)

答 まず，f は，$\mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_3$ の任意の関数だから，$3^3 = 27$ 個ある．

g は，f におけるいくつかの引数に対応する値が「未定義」となる部分関数である．

まず，1 つも未定義にしないものは $f = g$ であり，ただ 1 つである．引数のうち 1 か所だけ「未定義」にした場合は，$f(0), f(1), f(2)$ の 3 通りある．2 か所を「未定義」にした場合も 3 通りである．3 か所とも「未定義」にした場合は 1 通りである．

そこで，$27 \cdot (1 + 3 + 3 + 1) = 216$ 通りである．

問 2 (関数の性質)

定数 a, b, c は $0 \leq a, b, c < 13$ とする．関数 $f_{a,b,c} : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ を，$f_{a,b,c}(x) = (ax^2 + bx + c) \mod 13$ と定める．ただし， $\mod$ は，整数上の割り算の余りを求める演算子とする。

(a) $a = 0, b = 3, c = 2$ のとき，$f_{a,b,c}$ は全射か，また，単射か.

答 $f_{a,b,c}$ は $g(x) = 9x + 8 \mod 13$ とすると f と g が逆関数であることがわかり，f は単射でかつ全射である.

(b) $a = 1, b = 0, c = 2$ のとき，$f_{a,b,c}$ による集合 $\{1, 12\}$ の像を求めよ.

答 $f_{a,b,c}(1) = 3$, $f_{a,b,c}(12) = 3$ なので，求めるものは集合 $\{3\}$ である.

(c) $a = 0, b = 0$ のとき (c は固定しない)，$f_{a,b,c}$ が全単射であることを示せ．また，その逆関数はどのような関数か.

答 これは問題文のコピペミスであり,「$f_{a,b,c}$ が全単射である条件を示せ」という問題のはずであった.

この場合，$f_{a,b,c} = c \mod 13$ は c の値がなんであろうと全射でも単射でもない.

(d) $a = 0, c = 0$ のとき (b は固定しない)，$f_{a,b,c}$ が全単射であることを示せ．また，その逆関数はどのような関数か.

答 これも前問と同様，は問題文のコピペミスであり,「$f_{a,b,c}$ が全単射である条件を示せ」という問題のはずであった．この場合，$0 < b$ であれば，全単射である.

なぜなら，$b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ のそれぞれの値に対して $b' = 1, 7, 9, 10, 8, 11, 2, 5, 3, 4, 6, 12$ とすると，$bb' = 1 \mod 13$ となる．よって，この組合せの b, b' に対して，$f_{0,b,0}$ と $f_{0,b',0}$ とは互いに逆関数である.

(e) $a = 1, c = 0$ のとき (b は固定しない)，$f_{a,b,c}$ が全単射になることがあるか.

答 ない.

このことを示そう。$f_{a,b,c}$ を単に f と書くことにする.

$f(x) = x^2 + bx \mod 13$ であり，これを少し変形して，$f_{a,b,c} = ((x + 7b)^2 + 3b^2) \mod 13$ である．(13 で割った余りの世界であるので，$14bx = bx$, $52b^2 = 0$ であることに注意)．これより，$x + 7b$ が 1 と 12 になるように x を取ると，$1^2 = 1 = 12^2 \mod 13$ なのでその f による値は一致する．つまり，f が単射になることはない．f は有限集合上の関数であり，定義域とコドメインの要素数がおなじなので，単射にならなければ全射にならないので，全射になることもない.

答 (松井裕太郎君による解を若干整理したもの)

$f(x) = x^2 + bx \mod 13$ とする。b が偶数か奇数かで場合分けし、いずれの場合でも、f が単射とならないことを示す。

Case 1. b が偶数のとき。$f(x + 2) - f(x) = 4x + 2b + 4$ である。$b = 2b'$ と置くと、$x = 12 - b'$ のとき、$f(x + 2) - f(x)$ は 13 の倍数となり、13 で割った余りの世界で、$f(x + 2) = f(x)$ となる。(ここで $x = 12$ のときは $x + 2 = 1$ と考える。) よって、f は単射でない。

Case 2. b が奇数のとき。$f(x + 1) - f(x) = 2x + b + 1$ である。$b = 2b' + 1$ と置くと、$x = 12 - b'$ のとき、$f(x + 1) - f(x)$ は 13 の倍数となり、13 で割った余りの世界で、$f(x + 1) = f(x)$ となる。よって、f は単射でない。

以上いずれにしても f は単射にならないので、任意の b に対して、f は単射でない。

(f) $f_{a,b,c}$ が全単射になるための必要十分条件を求め，なる場合はその逆関数を求めよ．

答 必要十分条件は、「$a=0$ かつ $0<b<13$」である。

上記のものが必要十分条件になっていることの根拠:

(必要性) $f_{a,b,c}$ を単射と仮定する。前問の答えと同様の議論をすることにより、$a>0$ のときは、f は単射にならない。よって $a=0$ である。また、$b=0$ のときは明らかに単射にならないので、$0<b<13$ である。つまり、$a=0$ かつ $0<b<13$ が必要である。

(十分性) $a=0$ かつ $0<b<13$ と仮定する。$g,h:\mathcal{N}_{13}\to\mathcal{N}_{13}$ を $g(x)=(bx) \mod 13$, $h(x)=(x+c) \mod 13$ と置くと、前問までの答えより、g と h はともに単射である。よって $f_{a,b,c}=h\circ g$ も単射である。

(逆関数) $g_c(x)=(x-c) \mod 13$ とする。また、問 (d) の答え ($a=0,b>0,c=0$ のときの $f_{0,b,0}$ の逆関数) を h_b とする。このとき、求める逆関数は、$f_{0,b,c}^{-1}=h_b\circ g_c$ である。

問 3 (関数の性質) (a) 関数 $f:S\to T$ と $g:T\to U$ に対して，$g\circ f$ が単射であれば，f も単射であることを示しなさい．

答 「f が単射でなければ，$g\circ f$ も単射でない」ことを証明しよう．

f が単射でないとする．すると，$x\neq y$ かつ $f(x)=f(y)$ となる $x,y\in S$ が存在する．すると，$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(y))=(g\circ f)(y)$ であり，$x\neq y$ なので，$g\circ f$ は単射でない．

(b) $g\circ f$ が単射であっても，g の方は，必ずしも単射とは限らないことを示しなさい．

答 例を 1 つ出せばよい．$f,g:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ で $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$ (ただし $g(0)=0$) とする．

g は $g(1)=g(0)=0$ となるので単射でない．一方，$g\circ f$ は $\mathcal{N}$ 上の恒等関数であるので単射である．

参考 類似した証明問題として以下のものが考えられる。$g\circ f$ が定義されているとする。(つまり f のコドメインと g の定義域は同じ集合である。)

- f と g がともに単射なら、$g\circ f$ は単射である。
- f と g がともに全射なら、$g\circ f$ は全射である。
- $g\circ f$ が単射なら、f は単射である。(本問) ただし、g は必ずしも単射ではない。
- $g\circ f$ が全射なら、g は全射である。ただし、f は必ずしも全射ではない。

問 4 (関数プログラミング; 発展課題 [余力がある人のみ])

以下の条件をすべて満たす関数 $f:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ が存在するか調べよ。

(a) $x\geq 101$ となる任意の x に対して、$f(x)=x-10$.

(b) $x\leq 100$ となる任意の x に対して、$f(x)=f(f(x+11))$.

答これは John McCarthy (プログラミング言語 Lisp の生みの親、人工知能における「常識推論」の父) が考案した 91 関数とよばれるものであり、

$$M(x)=\begin{cases} 91 & \text{if } x\leq 101 \\ x-10 & \text{if } x>101 \end{cases}$$

となる関数 M を定義している。M は明らかに関数となっている。(実際には、自然数 x に対してだけではなく、負の整数を含めた整数の集合全体を定義域とする関数となっている。)

この関数 M が、問題文の (a),(b) を満たすことは、帰納法を使って証明することができるが、3 章までの範囲では、そういうことは特にやってこなかったので、ここでは省略する。意欲のある人は、6 章の「帰納」の章を学習してから考えてほしい。(ヒント: 「x に関する数学的帰納法」では証明できず、「$100-x$ に関する数学的帰納法」を使う。)