『離散構造』演習問題 (亀山)

以下の演習問題に対して、演習実施日までに解答 (A4 サイズ用紙、氏名・学籍番号明記) を用意せよ。

問題 1 (論理式の同値) 論理式 A と B が「同値である」とは、 A と B の真理値表での真理値 (のパターン) が同一であることをいう。(あるいは、 $A \Leftrightarrow B$ が恒真である、と言ってもよい)

以下の論理式たちが、同値かどうか判定しなさい。

- (a) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ と $A \vee (B \wedge C)$ と $A \vee ((A \vee B) \wedge C)$
- (b) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ と $A \wedge (B \vee C)$ と $A \wedge ((A \wedge B) \vee C)$
- (c) $\neg(A \vee (B \wedge C))$ と $(\neg A) \wedge (\neg(B \wedge C))$ と $(\neg A) \wedge ((\neg B) \vee (\neg C))$

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合が、等しいかどうか判定せよ。(等しい場合はその根拠を述べ、等しくない場合は具体的な反例をあげよ。ただし、反例は無闇に大きな集合を考えず、要素数が 2-3 個程度の小さな集合の範囲で考えるとよい。いわゆる「ベン図」(集合を図で表したものは、インフォーマルに考えるときには有用であるが、きちんとした根拠としては使えないので、ベン図による解答は無効である。)

- (a) 集合 $(S \cup T) - T$ と集合 $S - T$.
- (b) 集合 $(S \cap T) \cup (T \cap U)$ と集合 $T \cap (S \cup U)$.
- (c) 集合 $(S \cup T) \times U$ と集合 $(S \times U) \cup (T \times U)$.
- (d) 集合 $2^{S \times T}$ と集合 $2^S \times 2^T$.

問題 3 (集合と関数)

- (a) 集合 $(S \times T) \times U$ から集合 $S \times (T \times U)$ への全単射が存在することを示せ.
- (b) (発展課題) 集合 2^S から集合 S への全単射は存在するか?

問題 4 (有限集合の要素数)

S が有限集合のとき、 $\#S$ は S の要素数をあらわす。(なお、 S の要素数を $|S|$ と書くこともある。)

- (a) 集合 S, T に対して $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ である。
これを使って、集合 S, T, U に対して、 $\#(S \cup T \cup U)$ を、 $\#S, \#T, \#U, \#(S \cap T), \#(T \cap U), \#(U \cap S), \#(S \cap T \cap U)$ を使って表せ。
- (b) 集合 $S = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 100000\}$ とする。 S の要素のうち、3 で割り切れるか、7 で割って 4 余るか、13 で割って 5 余る整数の個数を求めなさい。
- (c) (発展課題) 同様に、集合 S, T, U, V に対して、 $\#(S \cup T \cup U \cup V)$ を求める公式を導きなさい。