

『離散構造』 2章の演習問題の解答例

問題 1 (論理式の同値) 論理式 A と B が「同値である」とは、 A と B の真理値表での真理値 (のパターン) が同一であることをいう。(あるいは、 $A \Leftrightarrow B$ が恒真である、と言ってもよい)

以下の論理式たちが、同値かどうか判定しなさい。

(a) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ と $A \vee (B \wedge C)$ と $A \vee ((A \vee B) \wedge C)$

答. 真理値表を書くことにより、すべて同値なことがわかる。(ここでは、途中を省略して結果だけを書くことにする。)

A	B	C	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee ((A \vee B) \wedge C)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F

(b) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ と $A \wedge (B \vee C)$ と $A \wedge ((A \wedge B) \vee C)$

答. 真理値表を書くことにより、すべて同値なことがわかる。(ここでは、途中を省略して結果だけを書くことにする。)

A	B	C	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge ((A \wedge B) \vee C)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F

(c) $\neg(A \vee (B \wedge C))$ と $(\neg A) \wedge (\neg(B \wedge C))$ と $(\neg A) \wedge ((\neg B) \vee (\neg C))$

答. 真理値表を書くことにより、すべて同値なことがわかる。(ここでは、途中を省略して結果だけを書くことにする。)

A	B	C	$\neg(A \vee (B \wedge C))$	$(\neg A) \wedge (\neg(B \wedge C))$	$(\neg A) \wedge ((\neg B) \vee (\neg C))$
T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合が、等しいかどうか判定せよ。(等しい場合はその根拠を述べ、等しくない場合は具体的な反例をあげよ。ただし、反例は無闇に大きな集合を考えず、要素数が 2-3 個程度の小さな集合の範囲で考えるとよい。いわゆる「ベン図」(集合を図で表したもの)は、インフォーマルに考えるときには有用であるが、きちんとした根拠としては使えないので、ベン図による解答は無効である。)

- (a) 集合 $(S \cup T) - T$ と集合 $S - T$.

答. 等しい。

根拠: $(S - T) \subset ((S \cup T) - T)$ は明らかなので、 $((S \cup T) - T) \subset (S - T)$ を示す。 $x \in ((S \cup T) - T)$ と仮定すると、差集合の定義より、 $x \in (S \cup T)$ かつ $x \notin T$ である。和集合の定義より、 $x \in S$ または $x \in T$ である。ところで、 $x \notin T$ であることがわかっているので、 $x \in S$ である。以上より、 $x \in S$ かつ $x \notin T$ なので、差集合の定義より $x \in S - T$ である。

- (b) 集合 $(S \cap T) \cup (T \cap U)$ と集合 $T \cap (S \cup U)$.

答. 等しい。

根拠: (これは両方の向きを証明しなければならない。)

(1) $((S \cap T) \cup (T \cap U)) \subset (T \cap (S \cup U))$ であることを示す。 $x \in ((S \cap T) \cup (T \cap U))$ と仮定する。和集合の定義より $x \in (S \cap T)$ または、 $x \in (T \cap U)$ である。そこで、場合分けする。

(Case 1) $x \in (S \cap T)$ のとき。共通部分の定義より、 $x \in S$ かつ $x \in T$ である。よって、 $x \in (S \cup U)$ がいえて、さらに、 $x \in (T \cap (S \cup U))$ となる。

(Case 2) $x \in (T \cap U)$ のとき。Case 1 とほぼ同様である。

以上より、いずれのケースでも、 $x \in (T \cap (S \cup U))$ となるので、証明できた。

(2) $(T \cap (S \cup U)) \subset ((S \cap T) \cup (T \cap U))$ であることを示す。 $x \in (T \cap (S \cup U))$ と仮定する。共通部分と和集合の定義より、 $(x \in T) \wedge ((x \in S) \vee (x \in U))$ である。そこで、場合分けする。

(Case 1) $x \in T$ かつ $x \in S$ のとき。この時、 $x \in S \cap T$ なので、 $x \in ((S \cap T) \cup (T \cap U))$ が言える。

(Case 2) $x \in T$ かつ $x \in U$ のとき。この時、 $x \in T \cap U$ なので、 $x \in ((S \cap T) \cup (T \cap U))$ が言える。

以上より、いずれのケースでも $x \in ((S \cap T) \cup (T \cap U))$ なので、証明できた。

- (c) 集合 $(S \cup T) \times U$ と集合 $(S \times U) \cup (T \times U)$.

答. 等しい。

根拠: (これは両方の向きを証明しなければならないが、ほぼ同じようなものなので、左辺が右辺の部分集合であることだけを示す。)

$x \in ((S \cup T) \times U)$ と仮定する。直積集合の定義より、 $x = \langle y, z \rangle$ という形であって、 $y \in (S \cup T)$ かつ $z \in U$ である。和集合の定義より、 $y \in S$ または $y \in T$ である。

$y \in S$ のときは、 $x = \langle y, z \rangle \in (S \times U)$ であり、 $y \in T$ のときは、 $x = \langle y, z \rangle \in (T \times U)$ であり、いずれの場合も x が右辺の要素であることが言える。

- (d) 集合 $2^{S \times T}$ と集合 $2^S \times 2^T$.

答. 必ずしも等しくない。

$S = \{\}, T = \{1\}$ とすると、 $S \times T$ は空集合なので、左辺は、 $\{\{\}\}$ という集合である。右辺は、 $\{\{\}, \{1\}\}$ と $\{\{1\}, \{1\}\}$ の 2 つの要素を持つ集合であり、一致しない。

(別解) 要素数を数える。 S, T の要素数をそれぞれ a, b とすると、左辺は 2^{ab} 個の要素をもち、右辺は $2^a 2^b = 2^{a+b}$ 個の要素をもつ。よって、たとえば、 $a = 2, b = 3$ のとき、要素数がことなるので、一致しない。

問題 3 (集合と関数)

- (a) 集合 $(S \times T) \times U$ から集合 $S \times (T \times U)$ への全単射が存在することを示せ。

答. 関数 $f : ((S \times T) \times U) \rightarrow (S \times (T \times U))$ を以下のように定義する。

集合 $(S \times T) \times U$ の任意の要素は、 $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ の形をしている。ただし、 $x \in S, y \in T, z \in U$ である。

そこで $f(\langle \langle x, y \rangle, z \rangle) = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ と定義する。

f は、上記の定義域とコドメインを持つ関数になっていることは容易にわかる。

f は、単射である。なぜなら、 $f(\langle \langle x_1, y_1 \rangle, z_1 \rangle) = f(\langle \langle x_2, y_2 \rangle, z_2 \rangle)$ と仮定すると、 f の定義から、 $\langle x_1, \langle y_1, z_1 \rangle \rangle = \langle x_2, \langle y_2, z_2 \rangle \rangle$ となり、組の定義から、 $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ となる。よって、 $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, z_1 \rangle = \langle \langle x_2, y_2 \rangle, z_2 \rangle$ となるので、単射であることが言えた。

f は、全射である。なぜなら、コドメインの任意の要素を取ると、それは、 $\langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ の形をしている。ただし、 $x \in S, y \in T, z \in U$ である。しかし、 $f(\langle \langle x, y \rangle, z \rangle) = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ なので、この要素は、 f による定義域全体の像の要素である。よって、 f は全射である。

- (b) (発展課題) 集合 2^S から集合 S への全単射は存在するか？

答. 存在しない。

S が有限集合とする。この場合、全単射が存在する 2 つの集合は、要素数が等しい。 S の要素数を n とすると、 2^S の要素数は 2^n である。 $n \geq 0$ の範囲で、 $2^n > n$ なので、両者は一致しない。よって、全単射は存在しない。

S が有限集合と限らない場合も、集合 2^S から集合 S への全単射が存在しないことが言えるが、これは、1 年次の「離散構造」の話題を越えるので、この資料の最後に補足するだけとする。興味がある人は読んでほしい。なお、講義資料には、関連する話題として、すべての実数が順番に並べられないこと (実数の集合と、自然数の集合の間に全単射が存在しないこと) の説明が書いてある。

問題 4 (有限集合の要素数)

S が有限集合のとき、 $\#S$ は S の要素数をあらわす。(なお、 S の要素数を $|S|$ と書くこともある。)

- (a) 集合 S, T に対して $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ である。

これを使って、集合 S, T, U に対して、 $\#(S \cup T \cup U)$ を、 $\#S, \#T, \#U, \#(S \cap T), \#(T \cap U), \#(U \cap S), \#(S \cap T \cap U)$ を使って表せ。

答. 式を繰返し使えばよい。

$$\begin{aligned} \#((S \cup T) \cup U) &= \#(S \cup T) + \#U - \#((S \cup T) \cap U) \\ &= (\#S + \#T - \#(S \cap T)) + \#U - \#((S \cap U) \cup (T \cap U)) \\ &= (\#S + \#T - \#(S \cap T)) + \#U - (\#(S \cap U) + \#(T \cap U) - \#((S \cap U) \cap (T \cap U))) \\ &= \#S + \#T + \#U - \#(S \cap T) - \#(U \cap S) - \#(T \cap U) + \#(S \cap T \cap U) \end{aligned}$$

- (b) 集合 $S = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 100000\}$ とする。 S の要素のうち、3 で割り切れるか、7 で割って 4 余るか、13 で割って 5 余る整数の個数を求めなさい。

答. 前問の結果を使う。

3 で割り切れる数は $100000/3 = 33333$ 個ある。

7 で割って 4 余る数は $100000/7 = 14285 + 1$ 個ある。

13 で割って 5 余る数は $100000/13 = 7692$ 個ある。

3 で割り切れ、7 で割って 4 余る数は $100000/21 = 4761+1$ 個ある。

3 で割り切れ、13 で割って 5 余る数は $100000/39 = 2564$ 個ある。

7 で割って 4 余り、13 で割って 5 余る数は $100000/91 = 1098 +1$ 個ある。

3 で割り切れ、7 で割って 4 余り、13 で割って 5 余る数は $100000/273 = 366+1$ 個ある。

(すべての結果に対して、「+1」の部分は、余りについて検討すればわかる。たとえば、2 番目のものでは、 $100000/7$ の余りが 5 なので、最後の余りの部分にも「7 で割って 4 余る数」があるので、+1 する。)

以上と公式を使うと、 $33333+14286+7692-4762-2564-1099+367 = 47253$ となる。

(c) (発展課題) 同様に、集合 S, T, U, V に対して、 $\#(S \cup T \cup U \cup V)$ を求める公式を導きなさい。

答. 前問をくりかえせばよい。答えだけを書くと、以下の通り。

$$\begin{aligned} \#(S \cup T \cup U \cup V) &= \#S + \#T + \#U + \#V \\ &\quad - \#(S \cap T) - \#(S \cap U) - \#(S \cap V) - \#(T \cap U) - \#(T \cap V) - \#(U \cap V) \\ &\quad + \#(S \cap T \cap U) + \#(S \cap T \cap V) + \#(S \cap U \cap V) + \#(T \cap U \cap V) \\ &\quad - \#(S \cap T \cap U \cap V) \end{aligned}$$

補足

以下の性質の証明を述べる。(「離散構造」の範囲を越えるので、この証明がわからなくても、興味がある人のみ読めばよい。)

「 S が無限かもしれない集合のとき、集合 2^S から集合 S への全単射は存在しない。」

証明: 2^S から S への全単射が存在すると仮定する。その逆関数を $f: S \rightarrow 2^S$ とすると、 f も全単射である。

そこで、 $T = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$ という集合を作る。この定義から、任意の $x \in S$ に対して、 $x \in T \Leftrightarrow x \notin f(x)$ が成立する。(この性質を (*) とする。)

T は S の部分集合なので、 $T \in 2^S$ である。 f は全単射なので、 $a \in S$ かつ $f(a) = T$ となる a が存在する。

上記の (*) の性質を a に適用すると、 $a \in T \Leftrightarrow a \notin f(a)$ となる。ところで、 $f(a) = T$ なので、 $a \in T \Leftrightarrow a \notin T$ であり、これは矛盾する。

結局、 2^S から S への全単射が存在すると仮定して矛盾ができたので、そのような全単射は存在しない。(証明終わり)

これは、いわゆる対角線論法的一种である。