

『離散構造』1章の演習問題の解答例 (亀山)

問1 次の日本語の文を論理式で表現しなさい。(基本命題の取り方は適宜おこなうこと。なお、本問では命題論理の範囲内で表現することを意図しているので、「(あなたが)」という部分は定式化する必要はない。)

- (a) 筑波大学ネットワークに(あなたが)アクセスできるのは、(あなたが)筑波大学の教職員か、科目等履修生以外の学生である場合のみである。

答. 基本命題として、P:「筑波大学ネットワークにアクセスできる」、Q:「筑波大学の教職員である」、R:「(筑波大学の)科目等履修生である」、S:「(筑波大学の)学生である」を取ると、与えられた文は、 $P \Rightarrow (Q \vee ((\neg R) \wedge S))$ と表現できる。なお、基本命題の取りかたによって答えがかわるので、答えは一意的ではない。

補足1. T:「(筑波大学の)科目等履修生以外の学生である」を基本命題とすると、与えられた文は、 $P \Rightarrow (Q \vee T)$ となる。

補足2. 日本語の「A となるのは B となる場合のみである」という表現は2通り以上の解釈が存在する(曖昧な文)である。

一番素直な解釈は“A only if B”であり、これは、授業でも説明したように $A \Rightarrow B$ と表現できる。 $(B \Rightarrow A)$ でないことに注意せよ。“A if B”は $B \Rightarrow A$ であるが、上記の文はそうではない。)

もう1つ、あり得る解釈は“A if and only if B”であり、これは、 $A \Leftrightarrow B$ と表現できる。(あるいは $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ と表現しても同じである。)これを日本語で正確に書くと、「A となるのは B となる場合、および、その時のみである」というものになる。こう書いてあれば、“A if and only if B”であることが明確だが、厄介なのは、「A となるのは B となる場合のみである」と言ったときも、話し手の意図によっては、“A if and only if B”と解釈できることもある。

ここでは、自然な解釈として1つ目を採用したが、文脈によっては2つ目も正解である。

- (b) (あなたが)12才以上であるか120cm以上の身長であるとき、木馬に乗ることができる。

答. 基本命題として、P:「12才以上である」、Q:「120cm以上の身長である」、R:「木馬に乗ることができる」とすると、 $(P \vee Q) \Rightarrow R$ と表現できる。

- (c) (あなたの)血中の中性脂肪が150mg/dl以上、最高血圧が130mmHg以上、空腹時血糖値が110mg/dl以上の3条件のうち2つ以上が成立し、かつ、(あなたの)腹囲が85cm以上であれば、(あなたは)メタボと診断される。

答. 基本命題として、P:「血中の中性脂肪が150mg/dl以上である」、Q:「最高血圧が130mmHg以上である」、R:「空腹時血糖値が110mg/dl以上である」、S:「腹囲が85cm以上である」、T:「メタボと診断される」とする。

まず、「P, Q, Rのうち2つ以上が成立する」という部分を定式化すると、(授業でやったように)、 $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (R \wedge P)$ と表現できる。(もっと複雑な表現にしてもよい。)

すると、問題文は、

$$(((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (R \wedge P)) \wedge S) \Rightarrow T$$

と表現できる。

- (d) (あなたの)血中の中性脂肪が150mg/dl以上、最高血圧が130mmHg以上、空腹時血糖値が110mg/dl以上の3条件のうち2つ以上が成立し、かつ、(あなたの)腹囲が85cm以上であれば、(あなたは)メタボと診断される。

答. 基本命題の取りかたは前問と同じとする。

「 P, Q, R のうち、ちょうど2つが成立する」という部分を定式化すると、 $(P \wedge Q \wedge (\neg R)) \vee ((\neg P) \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge (\neg Q) \wedge R)$ と表現できる。あとは前問と同じなので、問題文は、

$$(((P \wedge Q \wedge (\neg R)) \vee ((\neg P) \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge (\neg Q) \wedge R)) \wedge S) \Rightarrow T$$

と表現できる。

問2 後に記述する日本語の文を次の基本命題を使って論理式として表現しなさい。

- 基本命題 P: (ユーザは) 正しいパスワードを入力する。
- 基本命題 Q: (ユーザが) システムへのアクセスを認められる。
- 基本命題 R: (ユーザが) システム利用料を支払う。

(a) (ユーザは) システム使用料を払ったが正しいパスワードを入力していない。

答. $R \wedge (\neg P)$.

(b) (ユーザの) システムへのアクセスは、システム使用料を払い、正しいパスワードを入力すれば、認められる。

答. $(R \wedge P) \Rightarrow Q$.

(c) (ユーザの) システムへのアクセスは、システム使用料を払わなければ認められない。

答. $(\neg R) \Rightarrow (\neg Q)$.

(d) (ユーザが) 正しいパスワードを入力しなくても、システム使用料を払ったら、システムへのアクセスが認められる。

答. $((\neg P) \wedge R) \Rightarrow Q$.

また、これら4つの文(命題)は、矛盾しないか？

答. 上記4つの命題について、真理値表を作成する。(長くなるので、部分論理式に対応する列は省略する。)

P	Q	R	$R \wedge (\neg P)$	$(R \wedge P) \Rightarrow Q$	$(\neg R) \Rightarrow (\neg Q)$	$((\neg P) \wedge R) \Rightarrow Q$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T	T

この表の5行目(P, Q, R の真理値が、それぞれF,T,Tのとき)、4つの命題の真理値がすべてTとなるので、4つの命題は矛盾しない。

問3 下記の命題が恒真式であるか、また、充足可能であるか、判定せよ。

(a) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

(b) $(A \vee (B \wedge (\neg C))) \Rightarrow (((\neg C) \vee A) \wedge (A \vee B))$.

(c) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$.

(a) の答. 以下の真理値表より恒真式かつ充足可能である。

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

(b) の答. 以下の真理値表より恒真式かつ充足可能である。

A	B	C	$B \wedge (\neg C)$	$A \vee (B \wedge (\neg C))$	$(\neg C) \vee A$	$A \vee B$	$((\neg C) \vee A) \wedge (A \vee B)$	与式
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	T	F	F	T

(c) の答. 以下の真理値表より恒真式ではなく、充足可能である。

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$	与式
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	F

問 4

次の日本語の文を述語論理の論理式として表現しなさい。(基本命題の取り方は適宜おこなうこと。)

- (a) 情報科学類のある学生が沖縄を訪問した。
- (b) 期末試験で 100 点を取れば、A+ がもらえる。
- (c) 友達がいる人は、幸せである。
- (d) (難問) Facebook 友達になるには、一方から他方の人へ招待を送り、相手が OK する必要がある。

答. 基本命題のとりかたは色々あるところだが、ここでは、以下のようにする。

- $P(x)$ 「 x は情報科学類の学生である」
- $Q(x)$ 「 x は沖縄を訪問した」
- $R(x)$ 「 x は期末試験で 100 点を取る」
- $S(x)$ 「 x は A+ がもらえる」
- $T(x, y)$ 「 x は y の友達である」
- $U(x)$ 「 x は幸せである」
- $V(x, y)$ 「 x と y は Facebook 友達である」
- $W(x, y)$ 「 x は y へ招待を送る」
- $X(x, y)$ 「 x や y の招待に OK する」

- 「情報科学類のある学生が沖縄を訪問した」は、 $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ と表現できる。

補足 これを $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ とすると、別の意味の論理式になってしまう。(こちらは $P(x)$ を満たさない x が1つでもあったら、真となる論理式である。つまり、情報科学類生でない人が一人でもいたら真であるから、もとの日本語の文とはまったく意味がちがう。) この点は十分注意してほしい。

- 「期末試験で100点を取れば、A+ がもらえる」というのは、誰かがそういう状況になった、ということではなく、(ある科目では) 受講者の誰でも期末試験で100点なら A+ をもらえる、ということなので、「すべての」という記号をつかうのが適当である。

よって、 $\forall x(R(x) \Rightarrow S(x))$ と表現できる。

- 「友達がいる人は、幸せである。」

これは、「どんな x でも、 x は y と友達であれば、幸せである」と解釈できそうだが、この y がなにかを考えないといけない。意味を考えると、「 x は一人でも友達がいれば、幸せである」ということなので、「ある」を使う。

よって、 $\forall x((\exists y T(x, y)) \Rightarrow U(x))$ と表現できる。

なお、(授業ではやらなかったが) 述語論理の法則をつかえば、この論理式は、 $\forall x \forall y (T(x, y) \Rightarrow U(x))$ と同値であるので、こちらを解答としてもよい。

- (難問) Facebook 友達になるには、一方から他方の人へ招待を送り、相手が OK する必要がある。

まず、「A のためには B が必要である」、「A にとって B が必要条件である」というのは、 $A \Rightarrow B$ と表現されることに注意。(うっかり $B \Rightarrow A$ と書きそうだが、これでは、B は A にとっての十分条件になってしまう。)

次に、 x と y の2人がいるとき、「一方から他方へ招待を送る」ということは、 $W(x, y) \vee W(y, x)$ と表現できる。

よって、 $\forall x(V(x, y) \Rightarrow ((W(x, y) \wedge X(y, x)) \vee (W(y, x) \wedge X(x, y))))$ と表すことができる。