

『離散構造』 5 章 (グラフ), 6 章 (帰納) の演習問題 亀山

問題 1 (有向グラフ)

有向グラフ G を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 111\}$.
- 頂点 $\langle x_1, y_1 \rangle$ から頂点 $\langle x_2, y_2 \rangle$ への辺があるのは、以下のいずれかが成立するとき。
 - $(x_1 \geq 1) \wedge (y_1 \leq 100) \wedge (x_2 = x_1 + 1) \wedge (y_2 = y_1 + 11)$
 - $(x_1 \geq 1) \wedge (y_1 > 100) \wedge (x_2 = x_1 - 1) \wedge (y_2 = y_1 - 10)$

- (a) 頂点 $\langle 2, 100 \rangle$ にはいる辺の本数 (入次数) と、この頂点から出ていく辺の本数 (出次数) を求めなさい。
 答 . この頂点に入る辺の始点は、 $\langle 1, 89 \rangle$ と $\langle 3, 110 \rangle$ であるので入次数は 2 . この頂点から出る辺の終点は、 $\langle 3, 111 \rangle$ であるので出次数は 1 .
- (b) 頂点 $\langle 1, 90 \rangle$ を始点とする道の中で最長のものについて、その道の長さ (頂点の個数) と終点を求めなさい。
 答 . $90 \leq n \leq 100$ に対して、 $\langle 1, n \rangle \rightarrow \langle 2, n + 101 \rangle \rightarrow \langle 1, n + 1 \rangle$ である . よって、 $\langle 1, 90 \rangle \rightarrow \circ \rightarrow \langle 1, 91 \rangle \rightarrow \circ \rightarrow \cdots \rightarrow \circ \rightarrow \langle 1, 101 \rangle \rightarrow \langle 0, 91 \rangle$ となる . この道の長さは 23 であり、終点は $\langle 0, 91 \rangle$ である .
- (c) 頂点 $\langle 1, 0 \rangle$ を始点とする道の中で最長のものについて、その道の長さ (頂点の個数) と終点を求めなさい。
 答 . $\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 11 \rangle \rightarrow \langle 3, 22 \rangle \rightarrow \langle 4, 33 \rangle$ となって、これ以上は道が延びることはないので、長さ 3 で、終点は $\langle 4, 33 \rangle$ である .
- (d) グラフ G の頂点の総数と、辺の総数を求めなさい。
 答 . (頂点の個数) 頂点は、 $\langle x, y \rangle$ の形であり、 x が 5 通りで y が 112 通りなので、合計 560 個である . (辺の本数) 辺の定義の 1 つ目に適合する x_1, y_1, x_2, y_2 を数える。

$$(x_1 \geq 1) \wedge (y_1 \leq 100) \wedge (x_2 = x_1 + 1) \wedge (y_2 = y_1 + 11)$$

$x_1 = 1, 2, 3$ で $0 \leq y_1 \leq 100$ のとき、上記の論理式を満たす x_2, y_2 はちょうど 1 組だけ存在する。それ以外るとき、上記の論理式を満たす x_2, y_2 は存在しない。よって、上記の論理式を満たすのは 303 通りであり、303 本の辺がある。

次に、辺の定義の 2 つ目に適合する x_1, y_1, x_2, y_2 を数える。

$$(x_1 \geq 1) \wedge (y_1 > 100) \wedge (x_2 = x_1 - 1) \wedge (y_2 = y_1 - 10)$$

$x_1 = 1, 2, 3, 4$ で $101 \leq y_1 \leq 111$ のとき、上記の論理式を満たす x_2, y_2 はちょうど 1 組だけ存在する。それ以外るとき、上記の論理式を満たす x_2, y_2 は存在しない。よって、上記の論理式を満たすのは 44 通りであり、44 本の辺がある。

以上を合計して、辺の総数 (このグラフのサイズ) は、347 である。

- (e) グラフ G に自明でない閉路 (サイクル) はあるか答えなさい。ただし、閉路とは、始点と終点と同じ道のことであり、自明でない閉路とは、長さ 1 以上の閉路である。
 答 . (これは非常に難しい問題であり、解けなくても気にしなくてよい。) 自明でない閉路はない。正確に (厳密に) 解くには、第 6 章の「帰納」の知識がいる。ここでは、ややインフォーマルに解答を述べる。

閉路があると仮定する。この閉路に含まれる頂点の 1 つを $\langle x, y \rangle$ とすると、 $x > 0$ かつ $91 \leq y \leq 111$ が成立することがわかる。(なぜなら、 $x = 0$ であれば、その頂点から出る辺がなく、 $y < 91$ であれば、その頂点に入る辺がないので、いずれにしても閉路の一部になりようがない。) 以下のように x, y の値で場合分けし、すべての場合で矛盾することを示す。

(Case 1) $1 \leq x \leq 3$ かつ $91 \leq y \leq 100$ のとき、

まず、 $\langle x, y \rangle$ から始まる道は必ず $\langle x - 1, 91 \rangle$ へ到達することを言う。なぜなら、 $\langle x, y \rangle$ を始点とする道は、 $\langle x, y \rangle \rightarrow \langle x + 1, y + 11 \rangle \rightarrow \langle x, y + 1 \rangle \rightarrow \cdots \rightarrow \langle x, 100 \rangle \rightarrow \langle x + 1, 111 \rangle \rightarrow \langle x, 101 \rangle \rightarrow \langle x - 1, 91 \rangle$ となる。

これにより、 $\langle x, y \rangle$ から始まる道は、いずれ、必ず、 $\langle 0, 91 \rangle$ に到達し、そこから先へ行く辺はない。よって、閉路とはならず矛盾である。

(Case 2) $x = 4$ かつ $91 \leq y \leq 100$ のとき。

この場合は、 $\langle x, y \rangle$ から出る辺はないので、 $\langle x, y \rangle$ が閉路の一部であることに矛盾する。

(Case 3) $1 \leq x \leq 4$ かつ $101 \leq y \leq 111$ のとき。

$\langle x, y \rangle \rightarrow \langle x - 1, y - 10 \rangle$ となる。もし、 $x = 1$ なら、 $\langle x - 1, y - 10 \rangle$ から出る辺がなく、矛盾である。もし、 $x > 1$ で $y \leq 110$ なら、 $\langle x - 1, y - 10 \rangle$ は (Case 1) の条件を満たしているので、その場合に帰着できる。残るケースは、 $x > 1$ で $y = 111$ の時であるが、この場合も、 $\langle x, 111 \rangle \rightarrow \langle x - 1, 101 \rangle$ のあと、 $x - 1 = 0$ ならば出ていく辺がなく、 $x - 1 > 0$ ならば、さらに $\langle x - 2, 91 \rangle$ となって、(Case 1) に帰着でき、いずれにしても矛盾する。

以上より、いずれのケースでも矛盾するので、閉路はない。

補足 これは、「McCarthy の 91 関数」とよばれる有名な関数に対する計算を、グラフで表現したものである。91 関数を f とすると、その定義は、以下の通り。

- $x \leq 100$ ならば、 $f(x) = f(f(x + 11))$.
- $x > 100$ ならば、 $f(x) = x - 10$.

ここで、 $f(f(\cdots f(x) \cdots))$ (ただし f を n 回適用) を、 $\langle n, x \rangle$ と表すと、91 関数の定義は、この問題のグラフのように表現できる。91 関数で驚くのは、 f の定義の右辺に f が 2 回でてくるケースがあり、まったく帰納的定義にはなっていないし、とても停止する関数には見えないのに、実は、どんな整数 n に対しても $f(n)$ は計算が停止して、きちんと整数を返すことである。この証明はそれほど簡単ではない。

問題 2 (集合の帰納的定義) 以下の集合を帰納的に定義せよ。

- プログラム言語における正の整数定数を表す文字列 (先頭が 0 でない数字で、そのあと 0 から 9 までの数字が有限個続く文字列) の集合 S_1 .

答. まず、 $T_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $T_0 = \{0\} \cup T_1$ とする。このとき S_1 の帰納的定義は次の通り。

- $x \in T_1 \Rightarrow x \in S_1$.
- $s \in S_1 \wedge x \in S_0 \Rightarrow sx \in S_1$.
- (限定句は省略した)

- プログラム言語における整数定数を表す文字列の集合 S_2 . (前問に加えて、負の整数定数と 0 が追加される。なお、前問で得られた集合を S_1 として使ってよい。)

答. この問題は、実は帰納的定義ではなく、普通の定義の範囲で解ける。

- $0 \in S_2$.

- $x \in S_1 \Rightarrow x \in S_2.$
- $x \in S_1 \Rightarrow -x \in S_2.$
- (限定句は省略した)
- プログラム言語における識別子 (identifier) を表す文字列の集合 S_3 . (ここでは簡単のため, 先頭が英字でそのあと英数字またはアンダーラインが有限個続く文字列とする.)
 答. T_2 を英字の集合, T_3 を英数字とアンダースコアの集合とする.
 - $x \in T_2 \Rightarrow x \in S_3.$
 - $s \in S_3 \wedge x \in T_3 \Rightarrow sx \in S_3.$
 - (限定句は省略した)
- 自然数のリストであって, リスト中のどの要素も, それより左にある自然数より小さくない, という性質を満たすものの集合 S_4 . (たとえば, $\langle 10, 10, 20, 30 \rangle$.)
 答.
 - $\langle \rangle \in S_4.$
 - $n \in \mathcal{N} \Rightarrow \langle n \rangle \in S_4.$
 - $n \in \mathcal{N} \wedge \text{cons}(m, L) \in S_4 \wedge n \leq m \Rightarrow L \in S_4.$
 - (限定句は省略した)
- 小括弧 (丸括弧) と中括弧のそれぞれの開き括弧と閉じ括弧からなる文字列で, どの括弧も対応しているものの集合 S_5 . (たとえば, $\{((()((()))))\}$ は括弧が対応している文字列である.)
 答.
 - $\Lambda \in S_5$. (ただし Λ は空文字列をあらわす)
 - $s \in S_5 \Rightarrow (s) \in S_5.$
 - $s \in S_5 \Rightarrow \{s\} \in S_5.$
 - $s_1 \in S_5 \wedge s_2 \in S_5 \Rightarrow s_1 s_2 \in S_5.$
 - (限定句は省略した)

問題 3 (「帰納」に関する総合問題)

- 「変数 x と, 自然数の定数と, 二項演算 $\oplus$ から構成される式」を表す文字列の集合 E を帰納的に定義せよ. ただし, 二項演算は, $[a \oplus b]$ の形のものとする. (引数は 2 つであり, 中置記法であり, 必ず外にかぎ括弧を付ける)
 例えば, $[x \oplus 10]$ や $[[x \oplus 10] \oplus x]$ は上記の定義による式であり, $x \oplus 10$ や $[x \oplus 10 \oplus x]$ は上記の定義による式ではない.
 答.
 - $x \in E.$
 - $n \in \mathcal{N} \Rightarrow n \in E.$
 - $a \in E \wedge b \in E \Rightarrow [a \oplus b] \in E.$
- n を自然数とする. E の要素 e に対して, 「変数 x の値が n であり, $\oplus$ が足し算であるとしたときの式 e の値」を対応付ける関数 f_n を帰納的に定義せよ. たとえば, $f_{20}([x \oplus 10]) = 20 + 10 = 30$ である.
 答.
 - $f_n(x) = n.$

- $f_n(k) = k$.
- $f_n([a \oplus b]) = f_n(a) + f_n(b)$.
- n を自然数とする。 E の要素 e に対して、「 e 中の変数 x を n で置き換えた式」を対応付ける関数 g_n を帰納的に定義せよ。たとえば、 $g_{20}([x \oplus 10]) = [20 \oplus 10]$ である。 $g_n(e)$ は式を表すことに注意せよ。答。

- $g_n(x) = n$.
- $g_n(k) = k$.
- $g_n([a \oplus b]) = [g_n(k) \oplus g_n(b)]$.

- 任意の自然数 n と、式 $e \in E$ に対して、 $f_n(e) = f_0(g_n(e))$ が成立することを式 e に関する帰納法で証明せよ。

答。式 e に関する帰納法で「任意の自然数 n に対して $f_n(e) = f_0(g_n(e))$ 」であることを証明する。

(base case 1) $e = x$ のとき、 $f_n(e) = f_n(x) = n$ で $f_0(g_n(e)) = f_0(g_n(x)) = f_0(n) = n$ なので、両辺は等しい。

(base case 2) $e = k$ (k は自然数) のとき、 $f_n(e) = f_n(k) = k$ で $f_0(g_n(e)) = f_0(g_n(k)) = f_0(k) = k$ なので、両辺は等しい。

(induction step) $e = [a \oplus b]$ ($a, b \in E$) のとき、 $f_n(e) = f_n([a \oplus b]) = f_n(a) + f_n(b)$ である。

また、 $f_0(g_n(e)) = f_0(g_n([a \oplus b])) = f_0([g_n(a) \oplus g_n(b)])$ となり、これはさらに、 $f_0(g_n(a)) + f_0(g_n(b))$ と等しい。

帰納法の仮定により、 $f_n(a) = f_0(g_n(a))$ と $f_n(b) = f_0(g_n(b))$ が成立するので、証明したい式の両辺は等しい。

以上より、 e に関する帰納法で、「任意の自然数 n に対して $f_n(e) = f_0(g_n(e))$ 」であることが証明できた。

問題 4 (発展問題) テキストで定義されている「リストの長さを求める関数」を length と呼ぶ。関数 duplicate を以下のように定義するとき、任意のリスト L に対して、 $\text{length}(\text{duplicate}(L)) = 2 \cdot \text{length}(L)$ であることを証明せよ。

$$\text{duplicate}(L) = \begin{cases} \langle \rangle & (L = \langle \rangle \text{ の時}) \\ \text{cons}(x, \text{cons}(x, \text{duplicate}(L_2))) & (L = \text{cons}(x, L_2) \text{ の時}) \end{cases}$$

答。リスト L に関する帰納法で $\text{length}(\text{duplicate}(L)) = 2 \cdot \text{length}(L)$ を証明する。

(Base case) $L = \langle \rangle$ のとき。

左辺は、 $\text{length}(\text{duplicate}(L)) = \text{length}(\text{duplicate}(\langle \rangle)) = \text{length}(\langle \rangle) = 0$ となる。

右辺は、 $2 \cdot \text{length}(L) = 2 \cdot \text{length}(\langle \rangle) = 2 \cdot 0 = 0$ となり、左辺と一致する。

(Induction step) $L = \text{cons}x, L_2$ のとき、

$\text{length}(\text{duplicate}(L_2)) = 2 \cdot \text{length}(L_2)$ であることを仮定する。(これを帰納法の仮定という。)

左辺は、

$$\begin{aligned} \text{length}(\text{duplicate}(L)) &= \text{length}(\text{duplicate}(\text{cons}x, L_2)) \\ &= \text{length}(\text{cons}x, \text{cons}x, \text{duplicate}(L_2)) \\ &= 1 + \text{length}(\text{cons}x, \text{duplicate}(L_2)) \\ &= 1 + (1 + \text{length}(\text{duplicate}(L_2))) \end{aligned}$$

右辺は、

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{length}(L) &= 2 \cdot \text{length}(\text{cons } x, L_2) \\ &= 2 \cdot (1 + \text{length}(L_2)) \end{aligned}$$

ここで、帰納法の仮定を使うと、両辺が等しいことがわかる。

以上より、 L に関する帰納法により、 $\text{length}(\text{duplicate}(L)) = 2 \cdot \text{length}(L)$ が証明できた。