

『離散構造』 4 章 (関係) の演習問題 亀山

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。

問題 1 (2 項関係の性質)

集合 $\mathcal{N}_{20}$ 上の 2 項関係 R_i ($i = 1, 2$) を、

$$(xR_1y) \Leftrightarrow (x = y \vee x = 3y \vee x = 3y + 1)$$

$$(xR_2y) \Leftrightarrow (yR_1x)$$

と定める。

- (a) それぞれの R_i が反射的か調べよ。
- (b) それぞれの R_i が推移的か調べよ。
- (c) $R_1 \cup R_3$ (集合としての和集合) を $\mathcal{N}_{20}$ 上の二項関係と考えたとき、これは対称的か調べよ。
- (d) 1 以上の自然数 n に対して、 $\mathcal{N}_{20}$ 上の二項関係 T^n を、 $T^1 = R_1$, $T^{n+1} = T^n \circ R_1$ と定義する。このとき、 T^4, T^5 が推移的か調べよ。
- (e) 適当な n に対して T^n が推移的であったとする。このとき、 T^n は順序であることを示しなさい。
- (f) $R_1 \subset R_3$ となる集合 R_3 を $\mathcal{N}_{20}$ 上の二項関係と見なす。このような R_3 で同値関係となっているもののうち、集合として最小のものを示しなさい。

問題 2 (関係の結合と合成)

集合 S を人 (の名前) の集合、 T を授業 (の名前) の集合、 U を部屋 (の名前) の集合とする。 S, T 上の二項関係 R_1 と T, U 上の二項関係 R_2 が以下のように与えられたとする。

$$R_1 = \{ \langle \text{田中, 離散構造} \rangle, \langle \text{田中, 線型代数 I} \rangle, \langle \text{田中, 解析学 I} \rangle, \langle \text{伊藤, 離散構造} \rangle, \langle \text{伊藤, 解析学 II} \rangle, \\ \langle \text{佐藤, 離散構造} \rangle, \langle \text{佐藤, 解析学 I} \rangle, \langle \text{佐藤, 解析学 II} \rangle, \langle \text{佐藤, 主専攻実験 III} \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle \text{離散構造, 3A307} \rangle, \langle \text{線型代数 I, 3A307} \rangle, \langle \text{解析学 I, 3A307} \rangle, \langle \text{解析学 II, 3A307} \rangle, \\ \langle \text{主専攻実験 III, 3C113} \rangle, \langle \text{主専攻実験 III, 3C205} \rangle, \langle \text{主専攻実験 III, 3C206} \rangle \}$$

- (a) S, T, U 上の三項関係 R_3 を次のように定義するとき、 R_3 を集合としてその要素を具体的に列挙しなさい。

$$\langle x, y, z \rangle \in R_3 \Leftrightarrow (xR_1y \wedge yR_2z)$$

また、 R_3 はどういう意味を持つ関係か、簡単に述べなさい。

- (b) S, U 上の二項関係 R_4 を次のように定義する。

$$xR_4z \Leftrightarrow (\exists y \in T. \langle x, y, z \rangle \in R_3)$$

このとき、 R_4 を集合として、その要素を具体的に列挙しなさい。

- (c) $R_1 \circ R_2 = R_4$ であることを示しなさい。

問題 3 (発展課題: 同値関係の応用)

実数の上の二項関係 R を、 $xRy \Rightarrow |x - y| < 0.01$ と定める。 R は同値関係か?

また、この R を「2 つの実数の等しさ」を意味するものとして使うと、どのような不都合が生じるか考えなさい。