『離散構造』 4 章 (関係) の演習問題の解答例

亀山

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。

問題 1 (2 項関係の性質)

集合 $\mathcal{N}_{20}$ 上の 2 項関係 R_i $(i = 1, 2)$ を、

$$(xR_1y) \Leftrightarrow (x = y \vee x = 3y \vee x = 3y + 1)$$
$$(xR_2y) \Leftrightarrow (yR_1x)$$

と定める。

(a) それぞれの R_i が反射的か調べよ。

答. R_1 は反射的である。なぜなら、xR_1x がすべての $x \in \mathcal{N}_{20}$ に対して成立するから。

R_2 も反射的である。なぜなら、xR_2x は xR_1x と同値であるから。

(b) それぞれの R_i が推移的か調べよ。

答. R_1 は推移的ではない。なぜなら、$3R_11$ と $9R_13$ が成立するが、$9R_11$ が成立しないから。

R_2 は推移的ではない。なぜなら、$1R_23$ と $3R_29$ が成立するが、$1R_29$ が成立しないから。

(c) $R_1 \cup R_2$ (集合としての和集合) を $\mathcal{N}_{20}$ 上の二項関係と考えたとき、これは対称的か調べよ。

答. $R_1 \cup R_2$ は対称的である。なぜなら、$x(R_1 \cup R_2)y$ と仮定すると、xR_1y または、xR_2y である。xR_1y ならば、yR_2x であり、xR_2y ならば、yR_1x であるので、yR_1x または yR_2x が成立する。よって、$y(R_1 \cup R_2)x$ が成立する。これより、$R_1 \cup R_2$ は対称的である。

(d) 1 以上の自然数 n に対して、$\mathcal{N}_{20}$ 上の二項関係 T^n を、$T^1 = R_1, T^{n+1} = T^n \circ R_1$ と定義する。このとき、T^4, T^5 が推移的か調べよ。

参考. T^1, T^2, T^3 を図示したグラフを図 1 に示した。このグラフででは、xT^ny が成立するとき、y から x への矢印を書いている。ただし、すべての $x \in \mathcal{N}_{20}$ に対して xT^nx は成立するが、x から x へのリンクを書くと煩雑になるので、全て省略した。

答. 具体的に T^n を計算すればよい。以下では、T^n を集合として表示している。

$$\begin{aligned}
T^1 &= R_1 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathcal{N}_{20}\} \\
&\quad \cup \{\langle 1,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 7,2\rangle, \langle 9,3\rangle, \langle 10,3\rangle, \langle 12,4\rangle, \langle 13,4\rangle, \langle 15,5\rangle, \langle 16,5\rangle, \langle 18,6\rangle, \langle 19,6\rangle\} \\
T^2 &= T^1 \cup \{\langle 3,0\rangle, \langle 4,0\rangle, \langle 9,1\rangle, \langle 10,1\rangle, \langle 12,1\rangle, \langle 13,1\rangle, \langle 18,2\rangle, \langle 19,2\rangle\} \\
T^3 &= T^2 \cup \{\langle 9,0\rangle, \langle 10,0\rangle, \langle 12,0\rangle, \langle 13,0\rangle\} \\
T^4 &= T^3 \\
T^5 &= T^4
\end{aligned}$$

T^4 に対して、xT^4y かつ yT^4z ならば、(その全ての可能性をチェックすることにより) xT^4z が成立すことがわかるので、T^4 は推移的である。$T^5 = T^4$ なので、T^5 も推移的である。

(e) 適当な n に対して T^n が推移的であったとする。このとき、T^n は順序であることを示しなさい。

答. T^n は、T^1 を (集合として) 含む。$T^1 = R_1$ は反射的なので、T^n も反射的である。

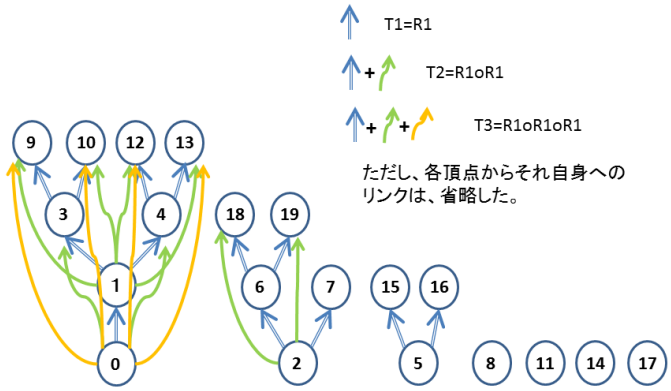

図 1: 二項関係 T^n (n=1,2,3)

xT^ny ならば、$x \geq y$ であることが容易に言える。よって、xT^ny かつ yT^nx ならば、$x \geq y$ かつ $y \geq x$ となり、$x = y$ となる。よって、T^n は反対称的である。

以上より、T^n が推移的ならば、T^n は順序である。

(f) $R_1 \subset R_3$ となる集合 R_3 を $\mathcal{N}_{20}$ 上の二項関係と見なす。このような R_3 で同値関係となっているもののうち、集合として最小のものを示しなさい。

答. 図 1 について考える。$R_1 \subset R_3$ なので、図の青いリンクは R_3 に含まれる。また、R_3 は推移的なので、緑とオレンジのリンクも R_3 に含まれる。さらに R_3 は対称的なので、x から y へのリンクがあれば y から x へのリンクもある。これらをあわせて考えると、任意の $x, y \in \{0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13\}$ に対して、xR_3y である。

同様にして考えると、

$$R_4 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \{0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13\}\}$$
$$R_5 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \{2, 6, 7, 18, 19\}\}$$
$$R_6 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \{5, 15, 16\}\}$$

と定義される R_4, R_5, R_6 に対して、R_3 は次のように表せる。

$$R_3 = R_4 \cup R_5 \cup R_6 \cup \{\langle 8, 8\rangle, \langle 11, 11\rangle, \langle 14, 14\rangle, \langle 17, 17\rangle\}$$

この R_3 が、反射的、推移的、対称的であることは、それぞれチェックするとわかる。

補足. 反射的な二項関係 R_1 が与えられたとき、本問の (d) は、R_1 を含む (最小の) 推移的な関係を求める手続きである。求められた二項関係 T^3 を「R_1 の推移閉包 (transitive closure)」と呼ぶ。本問の (f) は、二項関係 R_1 を含む (最小の) 同値関係を求める手続きである。

これらは、二項関係をグラフで図示しながら考えると、考えやすい。

問題 2 (関係の結合と合成)

集合 S を人 (の名前) の集合, T を授業 (の名前) の集合、U を部屋 (の名前) の集合とする。S, T 上の二項関係 R_1 と T, U 上の二項関係 R_2 が以下のように与えられたとする。

$$\begin{aligned} R_1 = \{&\langle \text{田中}, \text{離散構造} \rangle, \langle \text{田中}, \text{線型代数 I} \rangle, \langle \text{田中}, \text{解析学 I} \rangle, \langle \text{伊藤}, \text{離散構造} \rangle, \langle \text{伊藤}, \text{解析学 II} \rangle, \\ &\langle \text{佐藤}, \text{離散構造} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{解析学 I} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{解析学 II} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{主専攻実験 III} \rangle\} \\ R_2 = \{&\langle \text{離散構造}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{線型代数 I}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{解析学 I}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{解析学 II}, \text{3A307} \rangle, \\ &\langle \text{主専攻実験 III}, \text{3C113} \rangle, \langle \text{主専攻実験 III}, \text{3C205} \rangle, \langle \text{主専攻実験 III}, \text{3C206} \rangle\} \end{aligned}$$

(a) S, T, U 上の三項関係 R_3 を次のように定義するとき、R_3 を集合としてその要素を具体的に列挙しなさい。

$$\langle x, y, z \rangle \in R_3 \Leftrightarrow (xR_1y \wedge yR_2z)$$

また、R_3 はどういう意味を持つ関係か、簡単に述べなさい。

答. R_3 は、定義に従って単純に計算すればよい。答えは以下の通り。

$$\begin{aligned} R_3 = \{&\langle \text{田中}, \text{離散構造}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{田中}, \text{線型代数 I}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{田中}, \text{解析学 I}, \text{3A307} \rangle, \\ &\langle \text{伊藤}, \text{離散構造}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{伊藤}, \text{解析学 II}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{離散構造}, \text{3A307} \rangle, \\ &\langle \text{佐藤}, \text{解析学 I}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{解析学 II}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{主専攻実験 III}, \text{3C113} \rangle, \\ &\langle \text{佐藤}, \text{主専攻実験 III}, \text{3C205} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{主専攻実験 III}, \text{3C206} \rangle\} \end{aligned}$$

R_3 が「どういう意味を持つか」と言われても困るが、強いていえば「学生と、その学生が履修している授業と、その授業が開講される可能性のある部屋」をあらわす 3 項関係である。

(b) S, U 上の二項関係 R_4 を次のように定義する。

$$xR_4z \Leftrightarrow (\exists y \in T.\ \langle x, y, z \rangle \in R_3)$$

このとき、R_4 を集合として、その要素を具体的に列挙しなさい。

答. これも定義に従って計算すればよい。答えは以下の通り。

$$R_4 = \{\langle \text{田中}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{伊藤}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{3A307} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{3C113} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{3C205} \rangle, \langle \text{佐藤}, \text{3C206} \rangle\}$$

こちらの意味は、「学生と、その学生が授業を受けている可能性のある教室」をあらわす 2 項関係である。

(c) $R_1 \circ R_2 = R_4$ であることを示しなさい。

答. $R_1 \circ R_2$ を具体的に計算すると R_4 に一致することがわかる。

問題 3 (発展課題; 同値関係の応用)

実数の上の二項関係 R を、$xRy \Leftrightarrow |x - y| < 0.01$ と定める。R は同値関係か？

また、この R を「2 つの実数の等しさ」を意味するものとして使うと、どのような不都合が生じるか考えなさい。

答. この関係 R は同値関係ではない。なぜなら、$0R0.006$ と $0.006R0.012$ は成立するが、$0R0.012$ は成立しないから、推移的でない。

実数 (正確には浮動小数点の数) を扱うプログラミングでは、「実数 r_1 と r_2 が等しい」ことの判定方法として (誤差を考慮して) $|r_1 - r_2| < \epsilon$ とすることが多い。(ここで、ϵ は非常に小さい正の実数)。しかし、この判定方法で定める二項関係は、同値関係ではないので、これを「等しさ」として使ってしまうと、$r_1 = r_2$ と $r_2 = r_3$ が成立するのに、$r_1 = r_3$ は成立するとは限らないなど、プログラムの性質の解析や検証が困難になる。(プログラム言語の処理系であるコンパイラは、プログラムの性質に基づいて、実行性能のよいコードを生成するので、プログラムの性質についての推論ができなくなると、打撃が大きい。また、人間にとっても、$r = r'$ なのに $f(r) = f(r')$ とは限らない、としたら、プログラムを正しく書くのに大変な苦労があるだろう。)