『離散構造』 演習問題 (亀山)
2013.1.25 演習実施

この問題では、$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。

問 1 (関数に関する種々の定義)

$f : \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_3$ となる関数 f で、以下の条件を満たすものの個数を示せ。

(a) f は単射。

(b) $2 \in f(\{0,1\})$.

(c) $f(\{0,1\}) = \{0,1,2\}$.

(d) $\forall x \in \mathcal{N}_3.\ x \leq f(x)$.

(e) f は恒等関数でなく、$f \circ f = f$.

(f) f は恒等関数でなく、$(f \circ f) \circ f = f$.

問 2 (像、単射、全射、逆関数)

関数 $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ を $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ と定義する。(ただし、係数 a, b, c, d, e は実数とする。) このとき、以下が成立する条件 (必要十分条件) を、a, b, c, d, e に関する条件として述べなさい。

(a) f が全射である。(ヒント: $a \neq 0$ であれば、4 次の多項式なので、全射にはなり得ない。同様に 3 次、2 次、1 次、0 次のときを考えよ。)

(b) f が単射である。

(c) f の逆関数が存在する。

(d) $f(r) = r$ となる $r \in \mathcal{R}$ が無限個存在する。

問 3 (関数の性質)

関数 $f : \mathcal{N}_5 \to \mathcal{N}_2$ に対して、集合 S_f を次のように定める: $S_f = \{x \in \mathcal{N}_5 \mid f(x) = 1\}$

(a) $f(x) = x \texttt{ mod } 2$ のとき、S_f を求めなさい。(`mod` は割り算の余りを求める演算子とする。)

(b) 2 つの関数 $f, g : \mathcal{N}_5 \to \mathcal{N}_2$ に対して、$f \neq g$ であれば、$S_f \neq S_g$ であることを示しなさい。

(c) 次に、集合 $T \subset \mathcal{N}_5$ に対して、関数 $f_T : \mathcal{N}_5 \to \mathcal{N}_2$ を、次のように定める。

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in T \\ 1 & \text{if } x \notin T \end{cases}$$

集合 $S, T \subset \mathcal{N}_5$ に対して、$S \neq T$ ならば $f_S \neq f_T$ であることを示しなさい。

(d) $S \subset \mathcal{N}_5$ となる集合 S の個数と、$f : \mathcal{N}_5 \to \mathcal{N}_2$ となる関数 f の個数が同じであることを確かめよ。

問 4 (関数プログラミング; 発展課題 [余力がある人のみ])

以下の条件をすべて満たす部分関数 $f; \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ が存在するか調べよ。

(a) $x \geq y$ のとき、$f(x, y) = f(x - y, y)$.

(b) $x \leq y$ のとき、$f(x, y) = f(x, y - x)$.

(c) $f(x, 0) = f(0, x) = x$.