

『離散構造』第3章 演習問題 解答例

亀山

この問題では、 $\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。

問 1 (関数に関する種々の定義)

$f: \mathcal{N}_3 \rightarrow \mathcal{N}_3$ となる関数 f で、以下の条件を満たすものの個数を示せ。

(a) f は単射。

解答例. $f(0)$ の選び方は 3 通り, $f(1) \neq f(0)$ だから $f(1)$ の選び方は 2 通り, $f(2)$ は 1 通り, よって, 全部で 6 個である.

(b) $2 \in f(\{0, 1\})$.

解答例. $f(\{0, 1\})$ は f による集合 $\{0, 1\}$ の像である. これは, $\{f(0), f(1)\}$ という集合である. ただし, $f(0) = f(1)$ の場合もある. さて, $2 \in f(\{0, 1\}) = \{f(0), f(1)\}$ なので, $f(0) = 2$ または $f(1) = 2$ である. よって, $f(0), f(1)$ の可能な組み合わせは $(0, 2), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$ の 5 通りであり, $f(2)$ は何でもよいので 3 通りあり, 合計 15 個である.

(c) $f(\{0, 1\}) = \{0, 1, 2\}$.

解答例. $f(\{0, 1\}) = \{f(0), f(1)\}$ であり, 右辺は要素数が 2 個以下の集合である. よって, これが $\{0, 1, 2\}$ と一致することはなく, このような f は 0 個である.

(d) $\forall x \in \mathcal{N}_3, x \leq f(x)$.

解答例. $f(0) \geq 0$ により $f(0)$ の選択肢は 3 通り, $f(1) \geq 1$ により $f(1)$ の選択肢は 2 通り, $f(2) \geq 2$ により $f(2)$ の選択肢は 1 通りなので, 合計 6 個である.

(e) f は恒等関数でなく、 $f \circ f = f$.

解答例 (この問題はやや難しい). $a \in \mathcal{N}_3$ とし, $f(a) = b$ とすると, $b = f(a) = (f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(b)$ となる. よって b は f によって値が変わらない. (そのような b を f の不動点と言う.)

f の不動点の個数により分類しながら, 個数を勘定する. 上記の計算より f の不動点は 1 個以上ある.

f の不動点が 1 個のとき: 上記の計算から, どんな $x \in \mathcal{N}_3$ に対しても $f(x)$ は, f の不動点であるが, 不動点が 1 個しかないのので, どんな $x \in \mathcal{N}_3$ に対しても $f(x)$ の値は同じ (定数関数) である. そのような f は 3 個ある.

f の不動点が 2 個のとき: 不動点でない $\mathcal{N}_3$ の要素を c とおくと, $f(c) \neq c$ であるので, $f(c)$ は不動点である. このとき $f(f(c)) = f(c)$ なので, c 以外の 2 点が不動点であることとあわせて, $f \circ f = f$ が成立する. つまり, f の不動点が 2 個であれば, f は必ず $f \circ f = f$ を満たす. そのような f は (不動点でない要素 c の選び方が 3 通りで, $f(c)$ の選び方が 2 通りのため) 6 個ある.

f の不動点が 3 個のとき: すべての要素が不動点であれば, f は恒等関数になってしまい, 題意にあわない. 以上を合計して, f は 9 個ある. (なお, 他の計算方法もある.)

(f) f は恒等関数でなく、 $(f \circ f) \circ f = f$.

解答例 (この問題はやや難しい). もし $f \circ f = f$ であれば, $(f \circ f) \circ f = f \circ f = f$ となるので, 題意を満たす. つまり, 前問で計算した 9 個の関数は, すべて, 本問の条件を満たす.

そこで, それ以外のものを探そう.

f の不動点が 0 個のとき: $(f \circ f) \circ f = f$ を満たす関数 f は, a, b, c を b, a, a または b, a, b に写すことになる. そのような f の個数は 6 個ある.

f の不動点が 1 個のとき: $(f \circ f) \circ f = f$ を満たす関数 f で, 前問の条件を満たさないものは, a, b, c を a, c, b に写すことになる. そのような f の個数は 3 個ある.

f の不動点が 2 個のとき: すべての関数が前問の条件を満たしている.

f の不動点が 3 個のとき: 恒等関数となるが, これは条件より除外されている.

以上を合計し, さらに前問の 9 個を加えて, 合計 18 個である.

問 2 (像、単射、全射、逆関数)

関数 $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ を $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ と定義する。(ただし、係数 a, b, c, d, e は実数とする。) このとき、以下が成立する条件 (必要十分条件) を、 a, b, c, d, e に関する条件として述べなさい。

- (a) f が全射である。(ヒント: $a \neq 0$ であれば、4 次の多項式なので、全射にはなり得ない。同様に 3 次、2 次、1 次、0 次のときを考えよ。)

解答例. f が 3 次式のとき, x が正負の無限大に行くとき, $f(x)$ は正負の無限大に行くので, $f(x)$ の値は, 実数全体を動く. よって, 全射である. f が 2 次式のとき, $f(x)$ は明らかに全射でない. f が 1 次式のとき, $f(x)$ は全射である. f が 0 次式のとき, つまり, 定数関数のとき, $f(x)$ は全射でない.

以上をまとめると, f が全射であることと同値な条件は,

$$(a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (a = b = c = 0 \wedge d \neq 0)$$

となる.

- (b) f が単射である。

解答例. f が 4 次式のとき, 単射になり得ない.

f が 3 次式のとき ($a = 0$ のとき), f が単調増加または単調減少であることの必要十分条件は, $f'(x) = 0$ となる x がただ 1 つのとき, つまり, $f'(x) = 0$ が重根を持つときである. つまり, $3bx^2 + 2cx + d = 0$ が重根を持つので, $c^2 - 3bd = 0$ となる.

f が 2 次式のとき, $f(x)$ は明らかに単射でない. f が 1 次式のとき, $f(x)$ は単射である. f が 0 次式のとき, つまり, 定数関数のとき, $f(x)$ は単射でない.

以上をまとめると, f が単射であることと同値な条件は,

$$(a = 0 \wedge b \neq 0 \wedge c^2 = 3bd) \vee (a = b = c = 0 \wedge d \neq 0)$$

- (c) f の逆関数が存在する。

解答例. f が逆関数を持つことと, f が全単射であることは同値である. よって, 前の 2 問の答えの論理式の論理積を取ればよい.

$$(a = 0 \wedge b \neq 0 \wedge c^2 = 3bd) \vee (a = b = c = 0 \wedge d \neq 0)$$

- (d) $f(r) = r$ となる $r \in \mathcal{R}$ が無限個存在する。

解答例. f が 2 次以上の式のとき, $f(r) - r$ は 2 次以上の式であり, $f(r) - r = 0$ の解が無限個存在することはない.

f が 1 次式の時、 $f(r) = r$ を満たす r が無限個存在するのは、 $f(x) = x$ のときだけである。つまり、 $a = b = c = e = 0$ かつ $d = 1$ である。

f が 0 次式の時、 $f(r) = r$ を満たす r が無限個存在することはない。

以上より、 $a = b = c = e = 0 \wedge d = 1$ となる。

問 3 (関数の性質)

関数 $f: \mathcal{N}_5 \rightarrow \mathcal{N}_2$ に対して、集合 S_f を次のように定める: $S_f = \{x \in \mathcal{N}_5 \mid f(x) = 1\}$

- (a) $f(x) = x \bmod 2$ のとき、 S_f を求めなさい。(mod は割り算の余りを求める演算子とする。)

解答例. f の定義より、 $f(x) = 1$ となるのは $x = 1, 3$ である。よって、 $S_f = \{x \in \mathcal{N}_5 \mid f(x) = 1\} = \{1, 3\}$ である。

- (b) 2 つの関数 $f, g: \mathcal{N}_5 \rightarrow \mathcal{N}_2$ に対して、 $f \neq g$ であれば、 $S_f \neq S_g$ であることを示しなさい。

解答例. $f \neq g$ と関数の等しさの定義より、 $f(a) \neq g(a)$ となる $a \in \mathcal{N}_5$ が存在する。ところで、 f, g の domain は $\{0, 1\}$ なので、 $f(a) = 1$ ならば $g(a) = 0$ であり、 $a \in S_f$ と $a \notin S_g$ が言える。一方、 $f(a) = 0$ ならば $g(a) = 1$ となり、 $a \notin S_f$ と $a \in S_g$ が言える。

よって、いずれにしても $S_f \neq S_g$ である。

- (c) 次に、集合 $T \subset \mathcal{N}_5$ に対して、関数 $f_T: \mathcal{N}_5 \rightarrow \mathcal{N}_2$ を、次のように定める。

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in T \\ 1 & \text{if } x \notin T \end{cases}$$

集合 $S, T \subset \mathcal{N}_5$ に対して、 $S \neq T$ ならば $f_S \neq f_T$ であることを示しなさい。

解答例. $S \neq T$ より、 $a \in S$ かつ $a \notin T$ となる $a \in \mathcal{N}_5$ が存在するか、または、 $b \notin S$ かつ $b \in T$ となる $b \in \mathcal{N}_5$ が存在するかのどちらかである。

前者の場合、 $f(a) = 1$ かつ $g(a) \neq 1$ である。後者の場合、 $f(a) \neq 1$ かつ $g(a) = 1$ である。

よっていずれにしても、 $f_S \neq g_S$ である。

- (d) $S \subset \mathcal{N}_5$ となる集合 S の個数と、 $f: \mathcal{N}_5 \rightarrow \mathcal{N}_2$ となる関数 f の個数が同じであることを確かめよ。

解答例. $S \subset \mathcal{N}_5$ となる集合 S は、 $0 \in S$ かどうか $1 \in S$ かどうか、... $4 \in S$ かどうかという選択肢があり、そのような S の個数は合計で 32 個である。

一方、 $f: \mathcal{N}_5 \rightarrow \mathcal{N}_2$ となる関数 f は、 $x \in \mathcal{N}_5$ となる各々の x に対して、 $f(x)$ の選択肢が 2 つあるので、合計 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ 個ある。

補足. 上記の問題でわかるように集合 $\mathcal{N}_5$ の部分集合たちは、 $\mathcal{N}_5 \rightarrow \mathcal{N}_2$ という関数たちと 1 対 1 に対応している。(正確には、その対応付けが全単射となっている。)

問 4 (関数プログラミング; 発展課題 [余力がある人のみ])

以下の条件をすべて満たす部分関数 $f: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ が存在するか調べよ。

- (a) $x \geq y$ のとき、 $f(x, y) = f(x - y, y)$.

- (b) $x \leq y$ のとき、 $f(x, y) = f(x, y - x)$.

- (c) $f(x, 0) = f(0, x) = x$.

解答例. 存在する .

$\gcd(x, y)$ を「 $x = y = 0$ のときは 0, そうでないときは、 x と y の最大公約数 (greatest common divisor)」と定義すると、この $\gcd$ は上記の 3 条件を全て満たすことが以下のようにして言える。

たとえば、 $x \geq y$ のときを考えると、 $x = y = 0$ でなければ、 x と y の最大公約数は $x - y$ と y の最大公約数に等しい。また、 $x = y = 0$ ならば、 $\gcd(x, y) = \gcd(0, 0) = 0$ となり、 $\gcd(x - y, y) = \gcd(0, 0) = 0$ となるので両辺は等しい。同様に 2 番目の条件も成立することが言える。

3 番目の条件は、 $x \neq 0$ のとき x と 0 の最大公約数は x なので、 $\gcd(x, 0) = \gcd(0, x) = x$ は成立する。また、 $x = 0$ のとき、 $\gcd(0, 0) = 0$ なので $\gcd(x, 0) = \gcd(0, x) = x$ は成立する。

以上から f を上記の $\gcd$ とすると、3 条件を全て満たす。よって、上記を満たす部分関数 f は存在する。

補足 1. 実際には、 f は部分関数というだけでなく、関数にもなっている。また、上記の 3 条件を満たす f は、自然数の範囲内では 1 つしかない。

補足 2. 上記の 3 条件は、プログラム (部分関数) の「仕様」(specification) に相当する。この場合は、仕様を満たすものは 1 つしかなかったが、一般には、仕様を満たすものは複数あることが多い。