『離散構造』 2章の演習問題の解答例

亀山

問題 1 (論理式の同値変形; 一部は再出題) 以下の論理式を、それと同値な論理積標準形 ($\wedge$ が一番外側にあり、$\vee$ がその次で、一番内側に $\neg$ がある形式) の論理式に変形しなさい。また、その論理式が恒真式 (トートロジー) かどうかを判定しなさい。

(a) $\neg(((A \vee B) \vee C) \wedge (C \Rightarrow D))$.

(b) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

解答例 (a).

順番に変形するのだが、その前に注意事項：論理式の同値変形の場合は、$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow D$ と記述してはいけない。というのは、数式の同値変形では，$A = B = C$ と書けば「$A = B$ かつ $B = C$ (かつ $C = A$)」という意味だが，$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ という論理式は「A と B と C がすべて互いに同値である」ことを**意味しない**からである．この事を確認するため，$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ と $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$ の真理値表を書き，両者が一致しないことを確認してほしい．とはいえ,「論理式 A を同値変形して，論理式 B が得られ，B を同値変形して C が得られ‥」ということを手軽に表したい．(毎回，$A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C, C \Leftrightarrow \cdots$ と書くとすると，ほとんどの論理式を 2 回記述する必要があるため，非常に冗長である．) そこで、ここでは、論理記号にはない $\rightsquigarrow$ という記号をつかって、「A を同値変形したら B になる」という関係を $A \rightsquigarrow B$ と表記することにする。つまり，$A \rightsquigarrow B \rightsquigarrow C \rightsquigarrow \cdots$ は，$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge \cdots$ の省略形のつもりである．この $\rightsquigarrow$ という記号は，世の中の論理の教科書で使われているものではなく,「ここだけ」の記号である．

さて，(a) の論理式を同値変形する (変形のやりかたは，一意的ではないので下記以外の解答もあり得る).

$$
\begin{aligned}
\neg(((A \vee B) \vee C) \wedge (C \Rightarrow D)) &\rightsquigarrow \neg(((A \vee B) \vee C) \wedge ((\neg C) \vee D)) \\
&\rightsquigarrow (\neg((A \vee B) \vee C)) \vee (\neg((\neg C) \vee D)) \\
&\rightsquigarrow ((\neg(A \vee B)) \wedge (\neg C)) \vee ((\neg(\neg C)) \wedge (\neg D)) \\
&\rightsquigarrow (((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (\neg C)) \vee ((\neg(\neg C)) \wedge (\neg D)) \\
&\rightsquigarrow (((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (\neg C)) \vee (C \wedge (\neg D)) \\
&\rightsquigarrow ((((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (\neg C)) \vee C) \wedge ((((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (\neg C)) \vee (\neg D))
\end{aligned}
$$

ここから先を，このまま続けてもよいが，少しスピードアップするために、$(((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (\neg C)) \vee X$ という形を変形する。(あとで、X を C または $\neg D$ にするつもりである．)

$$
\begin{aligned}
(((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (\neg C)) \vee X &\rightsquigarrow (((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee X) \wedge ((\neg C) \vee X) \\
&\rightsquigarrow (((\neg A) \vee X) \wedge ((\neg B) \vee X)) \wedge ((\neg C) \vee X)
\end{aligned}
$$

この式で、X を C または $\neg D$ にすると、最終的な答えが以下のように得られる。

$$
\begin{aligned}
&((((\neg A) \vee C) \wedge ((\neg B) \vee C)) \wedge ((\neg C) \vee C)) \\
&\wedge ((((\neg A) \vee (\neg D)) \wedge ((\neg B) \vee (\neg D))) \wedge ((\neg C) \vee (\neg D)))
\end{aligned}
$$

なお、この論理式は恒真ではない。(恒真であるためには、$\wedge$ でつながっている部分論理式が全て恒真でなければいけないが、たとえば、$(\neg A) \vee C$ は恒真ではないので、全体も恒真ではない。)

解答例 (b).

$$
\begin{aligned}
((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A &\rightsquigarrow (\neg((\neg((\neg A) \vee B)) \vee A)) \vee A \\
&\rightsquigarrow ((\neg(\neg((\neg A) \vee B))) \wedge (\neg A)) \vee A \\
&\rightsquigarrow (((\neg A) \vee B) \wedge (\neg A)) \vee A \\
&\rightsquigarrow (((\neg A) \vee B) \vee A) \wedge ((\neg A) \vee A)
\end{aligned}
$$

この論理式は恒真である。($((\neg A) \vee B) \vee A$ は、A と $\neg A$ を含むので恒真である。$(\neg A) \vee A$ も同様に恒真である。よって、$\wedge$ でつながった全ての部分論理式が恒真なので、全体も恒真である。ちなみに、変形前の論理式は特に興味深い論理式であり、「パースの論理式」という名前がついている。(興味がある人は,「直観主義論理と古典論理」というキーワードで検索してみるとよい．)

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合が、等しいかどうか判定せよ。等しい場合はその根拠を述べ、等しくない場合は具体的な反例をあげよ。(なお,「すべてのものに対して〇〇という性質が成立する」という形の命題に対する反例とは,「〇〇という性質」を満たさない具体的なもののことである.「すべて...」という形の命題が成立しないことを示すには，1 つでも，それを満たさないものを示せばよいので，反例が 1 つあれば十分である．)

なお、反例は無闇に大きな集合を考えず、要素数が 2-3 個程度の小さな集合の範囲で考えるとよい。いわゆる「ベン図」(集合を図で表したもの) は、インフォーマルに考えるときには有用であるが、きちんとした根拠としては使えない。)

(a) 集合 $S \cap (T \cup U)$ と集合 $(S \cap T) \cup U$.

解答例.

必ずしも等しくない。反例の 1 つは、 $S = T = \{\}, U = \{10\}$ である。

(b) 集合 $S - (T \cap U)$ と集合 $(S - T) \cup (S - U)$.

解答例.

正しいので証明する。

2 つの集合が同じ要素を持つことを示せばよいので，$x \in (S - (T \cap U))$ と $x \in (S - T) \cup (S - U)$ が論理的に同値であることを示せばよい.

1 つ目の論理式は,

$$
\begin{aligned}
x \in (S - (T \cap U)) &\rightsquigarrow (x \in S) \wedge \neg(x \in (T \cap U)) \\
&\rightsquigarrow (x \in S) \wedge \neg((x \in T) \wedge (x \in U))
\end{aligned}
$$

となり，2 つ目は,

$$
\begin{aligned}
x \in (S - T) \cup (S - U) &\rightsquigarrow (x \in (S - T)) \vee (x \in (S - U)) \\
&\rightsquigarrow ((x \in S) \wedge \neg(x \in T)) \vee ((x \in S) \wedge \neg(x \in U))
\end{aligned}
$$

である．ところで，$A \wedge \neg(B \wedge C)$ と $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C)$ とは同値なので，この式で $A = (x \in S)$, $B = (x \in T)$, $C = (x \in U)$ と置くことにより，上記の両辺が同値であることがわかる．よって，$\forall x.(x \in (S - (T \cap U)) \Leftrightarrow x \in (S - T) \cup (S - U))$ となり，$S - (T \cap U) = (S - T) \cup (S - U)$ が証明できた．

(c) 集合 $(S \cap T) \times U$ と集合 $(S \times U) \cap (T \times U)$.

解答例.

正しいので証明する。

前問と同様，$x \in (S \cap T) \times U$ と $x \in (S \times U) \cap (T \times U)$ が論理的に同値であることを示せばよい．なお，2 つの集合の要素は，かならず,「対」の形をしていることがわかるので，x のところは $\langle v, w \rangle$ と置きなおして考える．つまり，$\langle v, w \rangle \in (S \cap T) \times U$ と $\langle v, w \rangle \in (S \times U) \cap (T \times U)$ が同値であることを示す．1 つ目の式は,

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle \in (S \cap T) \times U &\rightsquigarrow (v \in S \cap T) \wedge (w \in U) \\ &\rightsquigarrow ((v \in S) \wedge (v \in T)) \wedge (w \in U) \end{aligned}$$

となり，2 つ目は,

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle \in (S \times U) \cap (T \times U) &\rightsquigarrow (\langle v, w \rangle \in S \times U) \wedge (\langle v, w \rangle \in T \times U) \\ &\rightsquigarrow ((v \in S) \wedge (w \in U)) \wedge ((v \in T) \wedge (w \in U)) \end{aligned}$$

となり，$(A \wedge B) \wedge C$ と $(A \wedge C) \wedge (B \wedge C)$ は同値なので，上記の 2 つも同値である．

(d) 集合 $2^{S \cap T}$ と集合 $2^S \cap 2^T$.

解答例 (この問題はやや難しい).

正しいので証明する。

$x \in 2^{S \cap T}$ と $x \in 2^S \cap 2^T$ が同値であることを示す．1 つ目の式は,

$$x \in 2^{S \cap T} \rightsquigarrow x \subset S \cap T$$

で，2 つ目の式は,

$$\begin{aligned} x \in 2^S \cap 2^T &\rightsquigarrow (x \in 2^S) \wedge (x \in 2^T) \\ &\rightsquigarrow (x \subset S) \wedge (x \subset T) \end{aligned}$$

となる．

ところで、$x \subset S \cap T$ は $(x \subset S) \wedge (x \subset T)$ は同値なので、上記の 2 つの論理式も同値である。(本問ではこれでよいことにするが、この最後の部分も、本来は、証明を要する。この証明はやや難しいので、発展課題とする。)

問題 3 (有限集合の要素数)

S が有限集合のとき、$\#S$ は S の要素数をあらわす。(なお、S の要素数を $|S|$ と書くこともある。)

(a) 集合 S, T に対して $S \cap T = \{\}$ であれば、$\#(S \cup T) = \#S + \#T$ である。この事を使って、1 以上 10000 以下の整数のうち、4 の倍数であって、100 で割り切れないか 400 で割り切れるものの個数を示せ。

解答例

$S = \{1 \leq x \leq 10000 \mid x$ は、4 の倍数のうち 100 で割り切れないもの $\}$

$T = \{1 \leq x \leq 10000 \mid x$ は、400 で割り切れるもの $\}$

とする。明らかに $S \cap T = \{\}$ である。よって、$\#(S \cup T) = \#S + \#T = (2500 - 100) + 25 = 2425$ となる。

(b) $S \cap T = \{\}$ であるとは限らない集合 S, T に対して $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ である。この事を使って、1 以上 10000 以下の整数のうち、7 の倍数であって 11 で割り切れず、かつ、13 で割り切れるものの個数を示せ。

解答例.

S を，1 以上 10000 以下の整数のうち、7 と 13 の倍数の集合 (これは 91 の倍数の集合と同じ) とし，T を 1 以上 10000 以下の整数のうち、7 と 11 と 13 の倍数の集合 (これは 1001 の倍数の集合と同じ) とする．$|S| = 109$ で、$|T| = 9$ である。

求める集合は $S - T$ であり，$S \supset T$ であるので，$|S - T| = 109 - 9 = 100$ である．

補足. 「この事を使って」というヒントがあるが，使いようがない形がしているので，ここでは，ヒントは無視して解答した．問題文が,「… 11 で割り切れないか，または、13 で割り切れるもの」という形であったら，ヒントが役に立つ．(各自考えてみてほしい．)