

『離散構造』 Short Quiz の解答例

2011.12.02 (亀山)

Short Quiz 1. 論理式(命題)の「長さ」は、それに含まれる論理記号の数であるとする。なお、「かっこ」はカウントせず、同じ論理記号が2回以上でてきたら、その回数だけカウントする。つまり、 $A \wedge A \wedge A$ の長さは2である。

長さ n の命題論理式が与えられたとき、その真理値表のサイズは、最大でどれだけになるか。縦方向と横方向のサイズの最大値をそれぞれ答えなさい。

解答. 真理値表の縦方向のサイズ、すなわち、「行 (row) の数」は、各々の基本命題に対する真理値の割り当てパターンの数と一致する(「見出し」に相当する行は、ここでは、数えないことにする。) これは、基本命題が m 個あるとき、 2^m 個ある。長さ n の命題論理式が与えられたとき、そこには、最大 $n+1$ 個の基本命題が含まれるので、結局、「真理値表の行数」の最大値は、 2^{n+1} である。

真理値表の横方向のサイズ、すなわち、「列 (column) の数」は、真理値表の書き方によって異なってくる。ここでは、丁寧に「すべての部分論理式の真理値を記載する」方式で行こう。(これは、もっともサイズが大きくなる場合である。)

ところで、部分論理式とは何であろうか? きちんとした定義は、論理学の授業に譲ることにして、ここでは、例をあげて説明すると、 $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow D$ の部分論理式は、 $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow D$, $A \wedge (B \vee C)$, D , A , $B \vee C$, B , C の7個ある。

さて、論理式に対して、その部分論理式の数、最大いくつあるだろうか? これは、ちょっと頭を使う問題である。

これを考えるために、論理式を木の形で書く。たとえば、 $A \wedge (B \vee C)$ という論理式を図1のように書く。

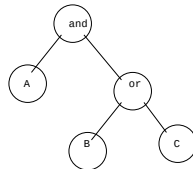


図 1: 論理式 $A \wedge (B \vee C)$ の図

これを見ると、5つの部分論理式 A , $A \wedge (B \vee C)$, B , $B \vee C$, C のそれぞれが、異なる木に対応しており、それぞれの一番上の頂点が木の根っこに相当する。つまり、木の根っこを1つ指定すると、1つの部分論理式が指定でき、結局、木の頂点の総数が、部分論理式の総数である。木の頂点の総数は、「その論理式に含まれる論理記号の総数」と、「基本命題の総数」の和である。(ただし、同じものが2回出てきたら、2個と数えることにする。) つまり、長さ n の論理式の部分論理式の数、論理記号に対応する n と、基本命題に対応する(最大) $n+1$ とで、合計は、最大で $2n+1$ 個である。

答え. 行数の最大値は 2^{n+1} , 列数の最大値は $2n+1$ である。