『離散構造』 6 章 (帰納) の演習問題 (亀山)

問題 1 (文字列の集合の帰納的定義)

(a) 「a,b,c の 3 文字からなる文字列で，a が (ちょうど) 3 回出現する文字列」の集合を，帰納的に定義せよ．

(b) 「a,b,c の 3 文字からなる文字列で，$a^n b^n c^n$ の形の文字列」の集合を，帰納的に定義せよ．ただし，n は自然数，a^n は a が n 回連続して出てくる文字列とする．

問題 2 (式の集合の帰納的定義) 文字列としての、type-1 の式と type-2 の式を、次のように帰納的に定める．(ただし、これらの定義で $e_1 + e_2$ 等は、実際の数の加算ではなく、「e_1 という文字列のあとに "+" という記号をかき、e_2 という文字列をかいたもの、という意味である。つまり 3+5 は 8 ではない。)

type-1 の式の帰納的定義:

- 0 から 9 までの整数は type-1 の式である．
- e_1, e_2 が type-1 の式であれば，$e_1 + e_2$ は type-1 の式である．
- e_1, e_2 が type-1 の式であれば，$e_1 * e_2$ は type-1 の式である．

type-2 の式 (補助的に「type-2a の式」を定義している)

- 0 から 9 までの整数は type-2a の式である．
- e_1, e_2 が type-2a の式であれば，$e_1 * e_2$ は type-2a の式である．
- e_1 が type-2a の式であれば，e_1 は type-2 の式である．
- e_1, e_2 が type-2 の式であれば，$e_1 + e_2$ は type-2 の式である．

問 2-a. 3+5*7 が type-1 の式であることを導出せよ。(具体的に、どの規則をどういう風に適用して言ったか、その過程を全部書きなさい。) また，これが、type-2 の式であることの導出も書きなさい。異なる導出が 2 個以上あるときは，その全てを列挙せよ．

問 2-b. 3*5*7 が type-1 の式であることの導出，また，type-2 の式であることの導出を書きなさい．ただし，異なる導出が 2 個以上あるときは，その全てを列挙せよ．

問 2-c. type-1 の式の「長さ」をあらわす関数 len をうまく定義したい。たとえば、$len(3) = len(5) = 1$ であり、$len(3 * 5 * 7) = 5$ である。関数 len を帰納的に定義せよ．

問 2-d. どんな type-1 の式 e に対しても，$len(e)$ は奇数であることを証明しなさい．

問 2-e. (発展課題) 「type-3 の式」の集合は以下を満たす。これを定義せよ．(1) type-1 の式の集合と type-3 の式の集合は等しい．(2) type-3 の定義には曖昧さがない。つまり、「e が type-3 の式であることの導出」は，どんな e に対してもたかだか 1 つである．

問題 3 (関数の帰納的定義)

自然数のリストの集合を S とする．関数 $f : S \to \mathcal{N}$ を次のように帰納的に定義する．(右辺の「+」は文字列ではなく、自然数上の本当の加算である。)

$$f(L) = \begin{cases} 0 & \text{if } L = \langle\rangle \\ x + f(L_1) & \text{if } L = \mathrm{cons}(x, L_1) \end{cases}$$

問 3-a. $f(\langle 1, 2, 3\rangle)$ つまり、$f(\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(3, \langle\rangle))))$ を計算しなさい．

問 3-a. 任意の $L_1, L_2 \in S$ に対して $f(L_1 \oplus L_2) = f(L_1) + f(L_2)$ が成立することを帰納法で証明しなさい．ただし、$\oplus$ はリストの連接 (concatenation) である (テキストを参照のこと)。