『離散構造』 5章 (グラフ) の演習問題
亀山

問題 1 (無向グラフ)

無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq y \leq 100\}$.
- V の要素 $\langle x_1, y_1\rangle$ と $\langle x_2, y_2\rangle$ の間に辺がある事の必要十分条件は、「$x_1 + y_1 = y_2 \wedge x_1 = x_2$」または、「$x_1 + y_1 = y_2 \wedge y_1 = x_2$」または、「$x_2 + y_2 = y_1 \wedge x_2 = x_1$」または、「$x_2 + y_2 = y_1 \wedge y_2 = x_1$」である。

(a) 頂点 $\langle 9, 27\rangle$ と頂点 $\langle 15, 30\rangle$ の次数をそれぞれ求めよ.

(b) 頂点 $\langle 9, 27\rangle$ から頂点 $\langle 45, x\rangle$ へ道が存在するような x の値を全て列挙せよ。また、その道の長さを求めよ。

(c) 頂点 $\langle 7, 27\rangle$ から頂点 $\langle 90, x\rangle$ へ道が存在するような x の値を全て列挙せよ。また、その道の長さを求めよ。

(d) グラフ G_1 の位数とサイズ (辺の本数) を求めよ.

(e) グラフ G_1 の閉路 (サイクル) のうち、同じ辺を 2 回以上通らないものは何個あるか求めよ．ただし、閉路とは、始点と終点が同じ頂点である道である。

(f) グラフ G_1 の連結成分は何個あるか。連結成分とは、G_1 の部分グラフで連結なものの中で「極大」なものである。(極大とは、それ以上、頂点を追加すると連結な部分グラフでなくなるもののことである。次数が 0 の頂点は、その一点だけで 1 つの連結成分であると見なす。)

(g) (やや難問) 無向グラフの直径は、グラフの 2 頂点間の距離の最大値と定義される。上記のグラフの連結成分のうち、直径が最大のものを求めよ。

問題 2 (有向グラフ)

有向グラフ G_2 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq y \leq 100\}$.
- V の要素 $\langle x_1, y_1\rangle$ から $\langle x_2, y_2\rangle$ への辺がある事の必要十分条件は、「$x_1 + y_1 = y_2 \wedge x_1 = x_2$」または、「$x_1 + y_1 = y_2 \wedge y_1 = x_2$」である。

(a) 頂点 $\langle 9, 27\rangle$ と頂点 $\langle 15, 30\rangle$ の出次数と入次数をそれぞれ求めよ.

(b) 頂点 $\langle 9, 27\rangle$ から頂点 $\langle x, y\rangle$ へ道が存在する x, y の値を全て列挙せよ。

(c) グラフ G_2 における最長の道の長さを求めなさい。

問題 3 (木に関する推論)

位数が n の木で異なるもの (同型でないもの) がいくつかあるか $n = 4, 5, 6$ について答えなさい。