『離散構造』 5章 (グラフ) の演習問題 解答例

亀山

問題 1 (無向グラフ)

無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq y \leq 100\}$.
- V の要素 $\langle x_1, y_1\rangle$ と $\langle x_2, y_2\rangle$ の間に辺がある事の必要十分条件は、「$x_1 + y_1 = y_2 \wedge x_1 = x_2$」または、「$x_1 + y_1 = y_2 \wedge y_1 = x_2$」または、「$x_2 + y_2 = y_1 \wedge x_2 = x_1$」または、「$x_2 + y_2 = y_1 \wedge y_2 = x_1$」である。

(a) 頂点 $\langle 9, 27\rangle$ と頂点 $\langle 15, 30\rangle$ の次数をそれぞれ求めよ.

答. 頂点 $\langle 9, 27\rangle$ とつながっている頂点は，$\langle 9, 36\rangle$，$\langle 27, 36\rangle$, $\langle 9, 18\rangle$ の 3 つであるので，次数は 3 である．(注. $\langle 18, 9\rangle$ はグラフ G_1 の頂点ではないので，考慮外である．)

頂点 $\langle 15, 30\rangle$ とつながっている頂点は，$\langle 15, 45\rangle$，$\langle 30, 45\rangle$, $\langle 15, 15\rangle$ の 3 つであるので，次数は 3 である.

(b) 頂点 $\langle 9, 27\rangle$ から頂点 $\langle 45, x\rangle$ へ道が存在するような x の値を全て列挙せよ。また、その道の長さを求めよ。

答. グラフ G_1 で頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ と頂点 $\langle x_2, y_2\rangle$ の間に辺があるとき,「x_1 と y_1 の最大公約数」と「x_2 と y_2 の最大公約数」が等しい．よって，頂点 $\langle 9, 27\rangle$ との間に道がある頂点 $\langle x, y\rangle$ は,「x と y の最大公約数が 9」のものである．45 と x の最大公約数が 9 であるような x は，$x = 9, 18, 27, 36, 54, 63, 72, 81, 99$ であるが，$\langle 45, x\rangle$ がグラフ G_1 の頂点であるためには，$45 \leq x$ なので，$x = 54, 63, 72, 81, 99$ である.

それぞれのケースでの道の長さは，ひたすら計算すればよい.

- 頂点 $\langle 45, 54\rangle$ への道は，$\langle 9, 27\rangle, \langle 9, 36\rangle, \langle 9, 45\rangle, \langle 45, 54\rangle$ なので長さ 3 である.
- 頂点 $\langle 45, 63\rangle$ への道は，$\langle 9, 27\rangle, \langle 9, 18\rangle, \langle 18, 27\rangle, \langle 18, 45\rangle, \langle 45, 63\rangle$ なので長さ 4 である.
- 頂点 $\langle 45, 72\rangle$ への道は，$\langle 9, 27\rangle, \langle 9, 18\rangle, \langle 18, 27\rangle, \langle 27, 45\rangle, \langle 45, 72\rangle$ なので長さ 4 である.
- 頂点 $\langle 45, 81\rangle$ への道は，$\langle 9, 27\rangle, \langle 9, 36\rangle, \langle 36, 45\rangle, \langle 45, 81\rangle$ なので長さ 3 である.
- 頂点 $\langle 45, 99\rangle$ への道は，$\langle 9, 27\rangle, \langle 9, 36\rangle, \langle 9, 45\rangle, \langle 45, 54\rangle, \langle 45, 99\rangle$ なので長さ 4 である.

補足. 実は，後の問題にあるように，グラフ G_1 は森 (forest, 全体が連結とは限らないが，各連結成分は木であるグラフ) になる．したがって，2 つの頂点間の単純な道 (同じ辺を 2 回以上通らない道) の本数は，たかだか 1 本である．(単純道がないか，1 本だけあるかのどちらかである)．従って，本問を答えるためには，ともかく (単純) 道を見つけて，その長さを求めればよい.

(c) 頂点 $\langle 7, 27\rangle$ から頂点 $\langle 90, x\rangle$ へ道が存在するような x の値を全て列挙せよ。また、その道の長さを求めよ。

答. 7 と 27 の最大公約数は 1 であるので，$90 \leq x$ で，90 と x の最大公約数が 1 であるものを全て求めればよい．答えは，$x = 91, 97$ である.

これらの道の長さをきちんと計算するのは，とても大変であるので，やらなくてもよい．ここでは,「G_1 が森である」ことがわかったとして計算する．つまり，ともかく，道を 1 本探せばよいことになる.

頂点 $\langle 7, 27\rangle$ から頂点 $\langle 90, 91\rangle$ への道は，頂点 $\langle 7, 27\rangle$ から頂点 $\langle 1, 6\rangle$ までの道 (長さ 4)，頂点 $\langle 1, 6\rangle$ から頂点 $\langle 1, 90\rangle$ までの道 (長さ 84)，頂点 $\langle 1, 90\rangle$ から頂点 $\langle 90, 91\rangle$ までの道 (長さ 1) から構成されるので，長さは，$4 + 84 + 1 = 89$ である.

頂点 $\langle 7, 27\rangle$ から頂点 $\langle 90, 97\rangle$ への道は，頂点 $\langle 7, 27\rangle$ から頂点 $\langle 7, 13\rangle$ までの道 (長さ 2)，頂点 $\langle 7, 13\rangle$ から頂点 $\langle 7, 90\rangle$ までの道 (長さ 11)，頂点 $\langle 7, 90\rangle$ から頂点 $\langle 90, 97\rangle$ までの道 (長さ 1) から構成されるので，長さは，$2 + 11 + 1 = 14$ である.

(d) グラフ G_1 の位数とサイズ (辺の本数) を求めよ．

答. G_1 の位数 (頂点の数) は，$1+2+\cdots+100$ なので，5050 である．

G_1 の辺の本数を単純に数えるのは大変ので，少し知恵を使う．

頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ に対して，$x_1+y_1 \geq x_2+y_2$ となるような頂点 $\langle x_2, y_2\rangle$ の間との辺を「頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ が所有する辺」と呼ぶことにする．少し考えると，$x_1 \neq y_1$ のときは，所有する辺はちょうど 1 本であり，$x_1 = y_1$ のときは 0 本である．つまり，$1 \leq x_1 < y_1 \leq 100$ のとき，頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ が所有する辺は各 1 本 (合計 4950 本) であり，$1 \leq x_1 = y_1 \leq 100$ のとき，頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ が所有する辺は 0 本である．

逆に，全ての辺は，ただ 1 つの頂点が所有しているので，このような数え上げですべての辺を 1 回ずつ数え上げることができる．結局，辺の総数は 4950 である．

(e) グラフ G_1 の閉路 (サイクル) のうち、同じ辺を 2 回以上通らないものは何個あるか求めよ．ただし、閉路とは、始点と終点が同じ頂点である道である。

答. これまでの議論から，G_1 に閉路がないことがわかるので，0 個である．ここでは，厳密に証明しなくても,「試行錯誤の結果、閉路がないとわかった」というのでもよい．

G_1 に閉路がないことの証明 (発展的内容であり、できなくてもよい).

G_1 に閉路があったとする．その閉路の頂点 $\langle x_0, y_0\rangle$ で，x_0+y_0 の値が最大のものの 1 つを取る．$\langle x_0, y_0\rangle$ から $\langle x_0, y_0\rangle$ への辺はないので，閉路には $\langle x_0, y_0\rangle$ 以外に，異なる 2 頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ と $\langle x_2, y_2\rangle$ があり，$\langle x_0, y_0\rangle$ から $\langle x_1, y_1\rangle$ への辺と，$\langle x_0, y_0\rangle$ から $\langle x_2, y_2\rangle$ への辺があるはずである．また，$x_0+y_0 \geq x_1+y_1$ かつ，$x_0+y_0 \geq x_2+y_2$ である．

しかし，G_1 の定義からこれはあり得ない．なぜなら，G_1 では，$x_0+y_0 \geq x_1+y_1$ となるような頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ はたかだか 1 つしかないからである．よって，G_1 に閉路はなく，は森である．

(f) グラフ G_1 の連結成分は何個あるか。連結成分とは、G_1 の部分グラフで連結なものの中で「極大」なものである。(極大とは、それ以上、頂点を追加すると連結な部分グラフでなくなるもののことである。次数が 0 の頂点は、その一点だけで 1 つの連結成分であると見なす。)

答. 100 個である．

理由．x と y の最大公約数を n とすると，すべての頂点 $\langle x, y\rangle$ は $\langle n, n\rangle$ への道があり，$n \neq m$ のとき，$\langle n, n\rangle$ と $\langle m, m\rangle$ の間に道はないので，連結成分は，異なる n の個数だけあり，合計で 100 個ある．(なお，1 点だけからなる部分グラフも連結成分となることに注意せよ．たとえば，$\langle 100, 100\rangle$ は，辺を 1 本ももたない頂点であり，これ 1 点のみで連結成分である．)

(g) (やや難問) 無向グラフの直径は、グラフの 2 頂点間の距離の最大値と定義される。上記のグラフの連結成分のうち、直径が最大のものを求めよ。

答. 最長の (単純) 道は，$\langle 1, 100\rangle$ から $\langle 1, 2\rangle$ へ行き，次に $\langle 2, 3\rangle$ へ行って $\langle 2, 99\rangle$ へ至る道なので，その長さは，147 である．この道は，$\langle 1, 1\rangle$ が含まれる連結成分 (最大公約数が 1 である頂点たちからなる連結成分) にある．

問題 2 (有向グラフ)

有向グラフ G_2 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq y \leq 100\}$.
- V の要素 $\langle x_1, y_1\rangle$ から $\langle x_2, y_2\rangle$ への辺がある事の必要十分条件は、「$x_1+y_1 = y_2 \wedge x_1 = x_2$」または、「$x_1+y_1 = y_2 \wedge y_1 = x_2$」である。

(a) 頂点 $\langle 9, 27\rangle$ と頂点 $\langle 15, 30\rangle$ の出次数と入次数をそれぞれ求めよ．

答. 頂点 $\langle 9,27\rangle$ から出て行く辺は，頂点 $\langle 9,36\rangle$ へ行くものと，頂点 $\langle 27,36\rangle$ へ行くものの 2 本であるので，出次数は 2 である．

頂点 $\langle 9,27\rangle$ にはいる辺は，頂点 $\langle 9,18\rangle$ からはいるものだけなので，入次数は 1 である．

頂点 $\langle 15,30\rangle$ から出て行く辺は，頂点 $\langle 15,45\rangle$ へ行くものと，頂点 $\langle 30,45\rangle$ へ行くものの 2 本であるので，出次数は 2 である．

頂点 $\langle 15,30\rangle$ にはいる辺は，頂点 $\langle 15,15\rangle$ からはいるものだけなので，入次数は 1 である．

(b) 頂点 $\langle 9,27\rangle$ から頂点 $\langle x,y\rangle$ へ道が存在する x,y の値を全て列挙せよ。

答. 問題 1 と違い，今度は有向グラフなので，辺の方向を考慮にいれる必要があり，かえって探索の範囲が狭まり簡単である．

答えは，以下のものである．($\langle 9,27\rangle$ から $\langle 9,27\rangle$ への辺はないが,「長さ 0 の道はある」と考えるので，ここでは，頂点 $\langle 9,27\rangle$ もいれている．ただ，この点は，あまり本質的なことではなく，定義上の問題なので，あまり気にしなくてよい．)

$\langle 9,27\rangle$, $\langle 9,36\rangle$, $\langle 9,45\rangle$, $\langle 9,54\rangle$, $\langle 9,63\rangle$, $\langle 9,72\rangle$, $\langle 9,81\rangle$, $\langle 9,90\rangle$, $\langle 9,99\rangle$, $\langle 27,36\rangle$, $\langle 27,63\rangle$, $\langle 27,90\rangle$, $\langle 36,45\rangle$, $\langle 36,63\rangle$, $\langle 36,81\rangle$, $\langle 36,99\rangle$, $\langle 45,54\rangle$, $\langle 45,81\rangle$, $\langle 45,99\rangle$, $\langle 54,63\rangle$, $\langle 54,99\rangle$, $\langle 63,72\rangle$, $\langle 63,90\rangle$, $\langle 63,99\rangle$. $\langle 72,81\rangle$, $\langle 81,90\rangle$, $\langle 90,99\rangle$

(c) グラフ G_2 における最長の道の長さを求めなさい。

答. 明らかに，$\langle 1,1\rangle$ から $\langle 1,100\rangle$ に行く道が最長であり，その長さは 99 である．(有向グラフなので，簡単である．)

問題 3 (木に関する推論)

位数が n の木で異なるもの (同型でないもの) がいくつかあるか $n=4,5,6$ について答えなさい。

答. 試行錯誤で解けばよい．絵を描けばよいのだが，とりあえずは，各グラフを「各頂点の次数をならべたもの」で表現することにする．たとえば，頂点数 3 の木は，一種類だけであり，それを (2,1,1) と書く．これは，次数 2 の頂点が 1 つ，次数 1 の頂点が 2 つあることを示す．(この表現方法で同じにならない 2 つのグラフは同型でない．一方，頂点間がどうつながっているかを表現していないので，この表現方法では同じでも実際には同型でないグラフも存在し得るが，小さいグラフなら一意的に復元できることが多い．)

$n=4$ のとき，互いに同型でない木は，$(3,1,1,1)$ と $(2,2,1,1)$ の 2 つである．

$n=5$ のとき，互いに同型でない木は，$(4,1,1,1,1)$ と $(3,2,1,1,1)$ と $(2,2,2,1,1)$ の 3 つである．

$n=6$ のとき，互いに同型でない木は，$(5,1,1,1,1,1)$ と $(4,2,1,1,1,1)$ と $(3,3,1,1,1,1)$ と $(3,2,2,1,1,1)$ (2 種類) と $(2,2,2,2,1,1)$ の 6 つである．

補足. 演習の際に指摘があったように、この答えは、5 章の例題として与えたものと違っている。その理由は、5 章の例題では、(きちんと書いていないのがいけないのだが) 「(順序) 木として同じ」でないものを数えたからである。一方、本問は、「グラフとし同じ」でないものの個数を数えている。その違いを見よう。(なお、これらの微妙な差異を「記憶する」ことは、現段階ではあまり意味がないので、以下の点は理解しなくてよい。期末試験では出さない。今回の教訓は「何と何が同じであるとおもうかによって、異なるものの個数が変化する」ということである。)

説明のために、位数 4 の 5 つのグラフ G_i $(i=1,2,3,4,5)$ を導入する。

- グラフとして同じ (同型): これは、講義テキストにある通りで、頂点の名前を無視して、2 つのグラフが対応付けられるならば、同じである。図 1 でいえば、G_1 と G_2 と G_3 は同型であり、G_4 と G_5 は同型である。(G_1 と G_4 は同型でない。) よって、グラフとしての「同じ」という概念のもとでは、異なるものは、2 個となる。

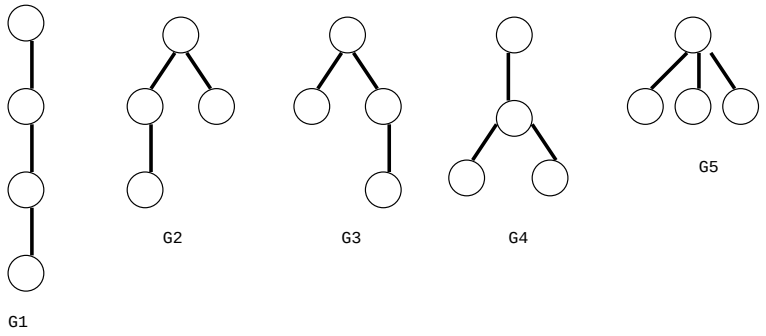

図 1: グラフたち

- (順序のない) 木として同じ: 木として同じかどうか、という場合は、「根」だけを特別視して、2 つの木が、「根」を保存して対応付くときに同じである図 1 では、一番上を「根」とすると、G_1 と G_2 は異なる。なぜなら、G_1 では「根」は次数 1 だが、G_2 では「根」の次数が 2 であるから。一方 G_2 と G_3 は同じである。なぜなら、「(順序木でない) 木」では、左右ひっくりかえしたものは同一視するからである。その他には、同じものの組み合わせはないので、同型なので、結局、異なるものは、4 個となる。
- 順序木として同じ: 順序木というのは、「根」を特別視するほかに、「兄弟姉妹間の順序」も保存しなければならない。図 1 では、一番上を「根」とすると、G_2 と G_3 も異なることになる。なぜなら、G_2 では「根」の左の子供は、さらに子供を持っているが、G_3 の「根」の左の子供は子供を持たない (「葉」である) からである。

  結局、この図にある 5 個がすべて、相異なるので、合計 5 個となる。