『離散構造』 4 章 (関係) の演習問題 の解答例

亀山

問題 1 (2 項関係)

筑波大学での在籍経験がある学生の集合を A とおいたとき、$i \in \{1,2,3\}$ に対して、以下のように定義した A 上の二項関係 R_i が、反射的、対称的、推移的、反対称的であるかを全て調べよ。(これらがわかると自動的に順序であるかどうか、同値関係であるかどうかわかるので、それもついでに答えよ。)

(a) $(x_1 R_1 x_2) \Leftrightarrow \big(x_1$は x_2の先輩である$\big)$

(b) $(x_1 R_2 x_2) \Leftrightarrow \big(x_1$は x_2と同期入学か、先輩である$\big)$

(c) $(x_1 R_3 x_2) \Leftrightarrow \big(x_1$と x_2は筑波大の同じサークルでの在籍経験がある$\big)$

解答の前の注意。 成立する場合は証明 (あるいは、説明) をつけるのはわかるだろうが、成立しない場合は「成立しそうもない」説明ではなく「成立しないことを具体的に示す反例」を持ってくるべきである。

解答R_1 は、反射的でない。(筑波大生の A 君は A 君自身の先輩ではない。) 対称的でない。(A 君が 2010 年入学、B 君が 2011 年入学とすると、A 君は B 君の先輩だが、B 君は A 君の先輩でない。) 推移的である。(A 君が B 君の先輩で、B 君は C 君の先輩なら、A 君は C 君の先輩である。) 反対称的である。(A 君が B 君の先輩で、B 君は A 君の先輩なら、それらは矛盾しているので、どんな結論でも言える。つまり、A 君と B 君は同一人物ということを結論付けてもよい。) よって、R_1 は順序でも同値関係でもない。

解答 R_2 は、反射的である。(筑波大生の A 君は A 君自身と同期入学である。) 対称的でない。(A 君が 2010 年入学、B 君が 2011 年入学とすると、A 君は B 君の同期か先輩だが、B 君は A 君の同期か先輩でない。) 推移的である。(書くのがしんどいので理由は省略) 反対称的でない。(A 君と B 君は別人で、同期生とする。すると、A 君は B 君の先輩か同期で、B 君は A 君の先輩か同期だが、A 君と B 君は同一人物でない。) よって、R_2 は順序でも同値関係でもない。

解答 R_3 は、反射的でない。(サークルにはいっていない A 君を取ってくると、A 君は A 君自身と同じサークルでの在籍経験はない。なんと! 最初想定していた模範解答は「反射的である」というものだったが、これは、演習の際に指摘してくれた人の方が正しかった。) 対称的である。(A 君が B 君と同じサークルに在籍経験があれば、B 君は A 君と同じサークルに在籍経験がある。) 推移的でない。(A 君が水泳部、B 君が水泳部と映画同好会、C 君が映画同好会に在籍経験があるとする。A 君と B 君は同一サークル在籍経験があり、B 君と C 君は同一サークル在籍経験があるが、A 君と C 君は同一サークル在籍経験がない。) 反対称的でない。(A 君と B 君は別人で、水泳部在籍経験があるとする。すると、A 君は B 君と同一サークル在籍経験があり、B 君は A 君と同一サークル在籍経験があるが、A 君と B 君は同一人物ではない。) よって、R_3 は順序でも同値関係でもない。

問題 2 (関係の合成)

前問の R_i に対して、$R_i \circ R_j = R_j \circ R_i$ となる場合をすべてあげよ ($i = j$ のケースも全て考慮せよ。)

解答. $\langle i,j \rangle = \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle$ である。このうち、$i = j$ のとき $R_i \circ R_j = R_j \circ R_i$ となることは自明。

$i = 1, j = 2$ のとき、上記の等式が成立することをチェックしよう。$a(R_1 \circ R_2)c$ と仮定する。合成関係の定義から、ある $b \in A$ に対して、aR_1b かつ bR_2c となる。つまり、a は b の先輩であり、b は c と同期か先輩である。よって、a は c の先輩である。よって、aR_2a かつ aR_1c が成立する。合成関係の定義から、$a(R_2 \circ R_1)c$ が成立する。同様に、$a(R_2 \circ R_1)c$ が成立すると仮定すると、$a(R_1 \circ R_2)c$ が証明できる。以上から、上記の等式が成立する。

$i=2, j=1$ のときも同じ。

$i=1, j=3$ のとき、上記の等式が成立しない理由: A 君は 2010 年入学で算盤研究会に在籍経験あり、また、算盤研究会は A 君しか在籍経験がない、とする。また、B 君は 2008 年入学、C 君は 2011 年入学で、いずれもサッカー部在籍とする。このとき、AR_1B と BR_3C は成立するから、$A(R_1 \circ R_3)C$ である。一方、AR_3x となる x は A 君自身しかいない (算盤研究会に在籍経験があるので A 君のみなので) が、AR_3C は成立しないから、AR_3x かつ xR_1C となる x は存在しない。つまり、$A(R_3 \circ R_1)C$ でない。よって、$R_1 \circ R_3 \neq R_3 \circ R_1$ である。$i=3, j=1$ も同じ。また、$i=2, j=3$ や $i=3, j=2$ のときも同様の反例がある。

問題 3 (証明)

集合 $\mathcal{N}$ 上の 2 項関係 R を、

$$(xRy) \Leftrightarrow (x = 2y \vee x = 2y+1)$$

と定める。

- R を含む 2 項関係で、推移的なものがあるか、あれば例を示しなさい。
- R を含む 2 項関係で、全順序となるものがあるか、あれば例を示しなさい。
- R を含む 2 項関係で、同値関係となるものがあるか、あれば例を示しなさい。

解答の前に補足 1. 演習でも説明したように、「○○である 2 項関係の例を示しなさい。」という問題に対する解答は、「2 項関係」であるから、必ず集合になることに注意してほしい。ここで「○○」には、「R を含み、推移的である」などがはいる。

このことを実感するため、昨年の演習問題を少し簡略化したものをやってみよう。「問題: 集合 $\{1,2\}$ 上の相異なる同値関係は何個あるか。」ここで、個数を勘定しているのは、同値関係である。つまり、ある種の二項関係である。そして、大事なことは、その二項関係の要素の数を聞いているのではなく、その二項関係の個数を聞いているのである。具体的には、集合 $\{1,2\}$ 上の相異なる同値関係は、$\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ と $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ の 2 つある。1 つ目は、通常の「等しい」という概念 (1=1 かつ 2=2 だが 1 と 2 は等しくない) を表す同値関係であり、 2 つ目は、「何もかも等しい (1=1=2=2)」という同値関係である。結局、上記の問題の答えは「2 個」となる。それぞれの 2 項関係 (同値関係) の要素の個数はまったく関係なく、「同値関係になっているもの」が何個あるか、という勘定である。

解答の前に補足 2. 「R を含む 2 項関係 R'」というときの「含む」とは、集合の包含関係のことである。つまり、$R \subset R'$ ということである。

解答R を含む 2 項関係で、推移的なものを R' と書くと、その候補はたくさんある。一番自明なものは、「$\mathcal{N}$ 上の最大の 2 項関係」である $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ である。これは、すべての自然数 a,b に対して、$aR'b$ が成立するような二項関係である。

もうちょっとスリムなものとしては、「R の推移閉包」がある。これは、

$$R'' = R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \cdots$$

という集合である。具体的には、

$$R'' = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,0\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 5,0\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 6,0\rangle, \cdots\}$$

となる。(書きれない。。。)

解答R を含む 2 項関係で、全順序を R_2 と書くと、これもたくさんある。一番自然な全順序は、$R_2 = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid x \geq y\}$ である。

解答R を含む 2 項関係で、同値関係となるものと R_3 と書くと、これは 1 つしかない。なぜなら、どんな自然数 x も、2 で割る (余りがでたら切り捨てる) 操作を繰返すと 0 になるので、$\langle x, 0\rangle$ は R の推移閉包 (上記のもの) の要素である。R_3 は R の推移閉包を含むので、xR_30 である。R_3 は対称的だから、$0R_3x$ である。これらが任意の x に対して成立して、さらに、R_3 は推移的だから、任意の x, y に対仕して xR_3y である。つまり、$R_3 = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ (すべての要素が、すべての要素と関係付いている 2 項関係、自明な同値関係) である。