『離散構造』 演習問題 (亀山)
2012.1.12 演習実施

問 1 (関数の定義)

$\mathcal{R}$ を実数の集合とし、$S = \{r \in \mathcal{R} \mid 0 < r < 2\pi\}$ とするとき、以下の対応付け $f_i : S \to \mathcal{R}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ がそれぞれ、部分関数になっているか、関数になっているかを調べなさい。また、関数になっているものについては、全射か、単射かを調べなさい。

(a) $f_0(x) = |\sin x|$. (b) $f_1(x) = f_0'(x)$. (つまり $f_0(x)$ を x に関して微分したもの)。(c) $f_3(x) = \sin \dfrac{1}{x}$.

問 2 (像、単射、全射、逆関数)

関数 $f : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ を次のように定義する。(ただし、$f(x, y)$ は、正式には、$f(\langle x, y\rangle)$ と書くべきものであるが、通常の関数の表記に従って、$f(x, y)$ と書く。)

$$f(x, y) = \frac{(x + y + 1)(x + y)}{2} + x$$

(a) $f(2, 3)$ を計算しなさい。また、$f(2, 3) = f(x, y)$ となる $\langle x, y\rangle$ を全て求めなさい。

(b) どんな自然数 x, y, x', y' に対しても、$x + y > x' + y'$ ならば $f(x, y) > f(x', y')$ を示しなさい。

(c) どんな自然数 x, y, x', y' に対しても、$x + y = x' + y'$ かつ $x > x'$ ならば $f(x, y) > f(x', y')$ を示しなさい。

(d) 上記の答を利用して、関数 f が単射であることを示しなさい。ただし、2 引数関数 f が単射であるとは、$\langle x, y\rangle \neq \langle x', y'\rangle \Rightarrow f(x, y) \neq f(x', y')$ が任意の自然数 x, y, x', y' に対して成立することである。さらに、$\langle x, y\rangle \neq \langle x', y'\rangle$ とは、$\neg(x = x' \wedge y = y')$ のことである。(つまり、$x \neq x' \wedge y \neq y'$ のことではない。)

(e) 任意の自然数 k に対して、$\dfrac{m^2 + m}{2} \leq k \leq \dfrac{m^2 + 3m}{2}$ となる自然数 m が唯一存在することを示しなさい。(ヒント: $\frac{m^2+3m}{2} + 1 = \frac{(m+1)^2+(m+1)}{2}$ である。)

(f) 前問の k は m に応じて決まる自然数であるので m_k と書くことにする。そこで、

$$x = k - \frac{m_k^2 + m_k}{2}, \qquad y = \frac{m_k^2 + 3m_k}{2} - k$$

と置くと、x, y は自然数であり、$f(x, y) = k$ となることを示しなさい。

(g) f は全射であることを示しなさい。

(h) (授業で説明し忘れたので発展課題とする) 関数 $f : S \to T$ に対して $g : T \to S$ となる関数 g が、$\forall x \in S.\ (g \circ f)(x) = x$ と $\forall y \in T.\ (f \circ g)(y) = y$ を満たすとき、g は f の逆関数と言う。f が全単射であることと f の逆関数が存在することは同値であることを示しなさい。

問 3 (証明)

3 つの関数 $f : S_1 \to S_2$, $g : S_3 \to S_4$, $h : S_5 \to S_6$ に対して、

(1) 合成関数 $(f \circ g) \circ h$ と合成関数 $f \circ (g \circ h)$ が定義されるための条件 (必要十分条件) を求めなさい。

(2) $(f \circ g) \circ h$ と $f \circ (g \circ h)$ が定義できるとき、$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ であることを証明しなさい。

問 4 (関数プログラミング; 発展課題 [余力がある人のみ])

以下の論理式をすべて満たす関数 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ が存在するかどうか調べよ。

$$\forall x.\ (x \geq 101 \Rightarrow f(x) = x - 10)$$
$$\forall x.\ (x < 101 \Rightarrow f(x) = f(f(x + 11))$$