『離散構造』 演習問題 3 の解答例
2012.1.12 演習実施, 亀山

問 1 (関数の定義)

$\mathcal{R}$ を実数の集合とし、$S = \{r \in \mathcal{R} \mid 0 < r < 2\pi\}$ とするとき、以下の対応付け $f_i : S \to \mathcal{R}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ がそれぞれ、部分関数になっているか、関数になっているかを調べなさい。また、関数になっているものについては、全射か、単射かを調べなさい。

(a) $f_0(x) = |\sin x|$. (b) $f_1(x) = f_0'(x)$. (つまり $f_0(x)$ を x に関して微分したもの)。(c) $f_3(x) = \sin \dfrac{1}{x}$.

答. (a) f_0 は S から $\mathcal{R}$ への関数である．なぜなら，任意の $x \in S$ に対して，$\sin x$ は $\mathcal{R}$ の要素であり，かつ，唯一つの値を持ち，その絶対値も同様であるから．f_0 は単射ではない．なぜなら，$f_0(\pi/2) = f_0(3\pi/2) = 1$ であるから．f_0 は前者ではない．なぜなら，$f_0(x) \leq 1$ であるから．

(b) f_1 は S から $\mathcal{R}$ への関数でない．なぜなら，$x = \pi$ の付近で f_0 は微分可能でないから ($x < \pi$ の範囲で x が π に近付くとき，微係数は -1 に近付き，$x > \pi$ の範囲で x が π に近付くとき，微係数は 1 に近付く).

(c) f_3 は S から $\mathcal{R}$ への関数である．なぜなら，$0 < x < 2\pi$ の範囲で $1/x$ は唯一の値を実数の範囲で持ち，$sin(1/x)$ も同様であるから．f_3 は単射ではない．なぜなら，$f_3(1/2\pi) = f_3(1/4\pi) = 0$ なので．f_3 は全射ではない．なぜなら，$f_3(x) \leq 1$ なので．

問 2 (像、単射、全射、逆関数)

関数 $f : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ を次のように定義する。(ただし、$f(x, y)$ は、正式には、$f(\langle x, y\rangle)$ と書くべきものであるが、通常の関数の表記に従って、$f(x, y)$ と書く。)

$$f(x, y) = \frac{(x + y + 1)(x + y)}{2} + x$$

(a) $f(2, 3)$ を計算しなさい。また、$f(2, 3) = f(x, y)$ となる $\langle x, y\rangle$ を全て求めなさい。

答. $f(2, 3) = 17$ である．また，$f(x, y) = 17$ となる x, y の組はこれしかない．

後者の証明のため，$f(x, y) = 17$ と仮定する．すると，$x + y \leq 5$ である ($x + y > 5$ のとき $f(x, y) \geq 21$ であるから)．また，$x + y \geq 5$ である ($x + y < 5$ のとき，$f(x, y) < 15$ であるから)．よって，$x + y = 5$ である．このことから，$x = 2$，また，$y = 3$ が導かれる．

(b) どんな自然数 x, y, x', y' に対しても、$x + y > x' + y'$ ならば $f(x, y) > f(x', y')$ を示しなさい。

答. $x' + y' = n$, $x + y = n + m$ とおくと ($m > 0$ である)，$f(x, y) - f(x', y') = (2nm + m^2 + m)/2 + x - x' \geq (2nm + m^2 + m)/2 - n = n(m - 1) + (m^2 + m)/2 > 0$

(c) どんな自然数 x, y, x', y' に対しても、$x + y = x' + y'$ かつ $x > x'$ ならば $f(x, y) > f(x', y')$ を示しなさい。

答. $f(x, y) - f(x', y') = x - x' > 0$.

(d) 上記の答を利用して、関数 f が単射であることを示しなさい。ただし、2 引数関数 f が単射であるとは、$\langle x, y\rangle \neq \langle x', y'\rangle \Rightarrow f(x, y) \neq f(x', y')$ が任意の自然数 x, y, x', y' に対して成立することである。さらに、$\langle x, y\rangle \neq \langle x', y'\rangle$ とは、$\neg(x = x' \wedge y = y')$ のことである。(つまり、$x \neq x' \wedge y \neq y'$ のことではない。)

答. $f(x, y) = f(x', y')$ から $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ を導くことにする．そこで $f(x, y) = f(x', y')$ を仮定する．このとき，前々問の結果から，$x + y = x' + y'$ でなくてはならない．すると，f の定義から，$f(x, y) = f(x', y')$ となるためには，$x = x'$ でなくてはらない．これより $y = y'$ もみ導け，結局，f は単射となる．

(e) 任意の自然数 k に対して、$\dfrac{m^2 + m}{2} \leq k \leq \dfrac{m^2 + 3m}{2}$ となる自然数 m が唯一存在することを示しなさい。(ヒント: $\frac{m^2+3m}{2} + 1 = \frac{(m+1)^2+(m+1)}{2}$ である。)

答. 自然数 m に対して集合 $S_m = \{x \in \mathcal{N} \mid \dfrac{m^2+m}{2} \leq x \leq \dfrac{m^2+3m}{2}\}$ とする。すると、ヒントから明らかに、$m \neq n$ ならば $S_m \cap S_n = \{\}$ である。また、S_m すべての和集合が、ちょうど $\mathcal{N}$ になることも容易にわかる。

よって、$\mathcal{N}$ は、S_m たちに分割され、どんな $k \in \mathcal{N}$ をとっても、$k \in S_m$ となる集合 S_m が一意的に存在する。

(f) 前問の k は m に応じて決まる自然数であるので m_k と書くことにする。そこで、

$$x = k - \frac{m_k^2 + m_k}{2}, \qquad y = \frac{m_k^2 + 3m_k}{2} - k$$

と置くと、x, y は自然数であり、$f(x, y) = k$ となることを示しなさい。

答. まず，x, y が自然数であることを示す．このためには,$(m_k^2 + m_k)/2$ が自然数であることを示せばよいが，$(m_k^2 + m_k)/2 = m_k(m_k + 1)/2$ となり，$m_k(m_k + 1)$ は必ず偶数であるので x, y は自然数である．

また，この x, y の値に対して，$x + y = m_k$ となり，$f(x, y) = (m_k + 1)m_k/2 + k - (m_k^2 + m_k)/2 = k$ となる．

(g) f は全射であることを示しなさい。

答. 任意の自然数 k に対して，前問の問題文の通りに x, y を定めると，$f(x, y) = k$ となる．すなわち，f は全射である．

(h) (授業で説明し忘れたので発展課題とする) 関数 $f : S \to T$ に対して $g : T \to S$ となる関数 g が、$\forall x \in S.\ (g \circ f)(x) = x$ と $\forall y \in T.\ (f \circ g)(y) = y$ を満たすとき、g は f の逆関数と言う。f が全単射であることと f の逆関数が存在することは同値であることを示しなさい。

答. 最初に f が全単射であれば，逆関数をもつことを示す．

まず，f が全単射と仮定する．任意の $y \in T$ を取る．f は全射なので，$x \in S$ で $f(x) = y$ となるものが存在する．そこで，y から，そのような x への対応付けを考え，g と呼ぶ．g は $T \to S$ の関数である．なぜなら，f は単射なので，$f(x) = f(x')$ となる $x, x' \in S$ が存在すれば，$x = x'$ だから，$g(y)$ の値は一意的である．

次に，この g が f の逆関数であることを示す．まず，$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ である．任意の $y \in T$ に対して，$f(x) = y$ となる $x \in S$ が存在する．よって，$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x) = y$ となる．以上より，$g \circ f$ も $f \circ g$ も恒等関数であるので，f と g は互いに逆関数である．

次に f が逆関数 g を持てば、f は全単射であることを示す。

単射であることを示すには、「任意の $x, y \in S$ に対して、$f(x) = f(y)$ ならば $x = y$」を示せばよい。そこで $f(x) = f(y)$ と過程すると、$g(f(x)) = g(f(y))$ である。g は f の逆関数なので、$g(f(x)) = x$ かつ $g(f(y)) = y$ である。よって、$x = y$ である。

全射であることを示すために、任意の $y \in T$ を取る。このとき、$g(y) \in S$ であり、$f(g(y)) = y$ となる。よって、$f(x) = y$ となる x が ($g(y)$ として) 存在する。よって、f は全射である。

補足 本問の最後の証明は、難しいので、全部できなくてもよいが、「関数が全単射であることと、逆関数をもつことは同値である」という事実はしっかり頭にいれてほしい。これは大事な性質である。

問 2 全体の解説.

関数 f は、$\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ と $\mathcal{N}$ の間の全単射であり、この 2 つの集合が「ぴったり」対応することを意味している。この事実をつかえば、たとえば、「2 つの自然数の組を、順番に 1 列に並べる」ことができる。つまり、f の逆関数 f^{-1} を考え、$f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(2), \cdots$ と並べると、これは、「2 つの自然数の組」をすべて並べた列になる。

情報科学におけるアルゴリズムでは、このように、「ある性質のものをすべて並べる (列挙する; enumerate)」ことが非常に重要であり、今回は、その一例を見たのである。

問 3 (証明)

3 つの関数 $f : S_1 \to S_2$, $g : S_3 \to S_4$, $h : S_5 \to S_6$ に対して、

(1) 合成関数 $(f \circ g) \circ h$ と合成関数 $f \circ (g \circ h)$ が定義されるための条件 (必要十分条件) を求めなさい。

答. 合成関数 $(f \circ g) \circ h$ が定義されるためには，まず，$f \circ g$ が定義されるために，$S_4 = S_1$ が必要．$f \circ g$ の定義域は S_3 なので，h のコドメイン S_6 が S_3 と一致する必要がある．逆に，$S_1 = S_4$ かつ $S_3 = S_6$ と仮定すると，合成関数 $(f \circ g) \circ h$ が定義されることは容易にわかる．

合成関数 $f \circ (g \circ h)$ が定義されるための条件は，上と同じように考えて $S_1 = S_4$ かつ $S_3 = S_6$ であることがわかる．

補足. 演習の際に、学生の人から指摘があったように、この授業での「合成関数が定義できる条件」は少し厳し目であり、もう少し緩くてもよい。つまり、$f : S_1 \to S_2$ と $g : S_3 \to S_4$ の合成関数 $g \circ f$ が定義できる条件は、この授業では、$S_2 = S_3$ としているが、実際には、$S_2 \subset S_3$ でよい。この緩和された条件のもとでは、本問の答えは、「$S_1 \subset S_4$ かつ $S_3 \subset S_6$ 」となる。

(2) $(f \circ g) \circ h$ と $f \circ (g \circ h)$ が定義できるとき、$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ であることを証明しなさい。

答. $x \in S_5$ とすると，$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h))(x)$ となる．また，$(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x)))$ となり一致する．

問 4 (関数プログラミング; 発展課題 [余力がある人のみ])

以下の論理式をすべて満たす関数 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ が存在するかどうか調べよ。

$$\forall x.\ (x \geq 101 \Rightarrow f(x) = x - 10)$$
$$\forall x.\ (x < 101 \Rightarrow f(x) = f(f(x + 11))$$

答. 存在する．$x \leq 100$ のとき $g(x) = 91$ となり，$x > 100$ のき $g(x) = x - 10$ となる．