『離散構造』演習問題 (亀山)
2011.12.20 演習分

問 1 (述語論理; ∀ と ∃ の用法)

(a) 「筑波大生は全員コンピュータのユーザ ID を持っている」という文を，論理式で表現しなさい．ただし，T(x)=「x さんが筑波大生である」，A(x)=「x さんがコンピュータのユーザ ID を持っている」と表現しなさい．

解答. 問題文は「.. となるものは全て...」という事なので,「全て」を意味する ∀ の記号を使う．答えは, $\forall x.\ (T(x) \Rightarrow A(x))$ である．

(b) 上記と同じ文を，T(x)=「x さんが筑波大生である」，H(x,y)=「x さんがコンピュータ y のユーザ ID を持っている」(と論理記号) を使って表現しなさい．

解答の前の考察 (試行錯誤). 単純に考えると，$\forall x.\ (T(x) \Rightarrow H(x,y))$ となりそうであるが，この論理式の真理値は，y の値に依存してしまう．一方，問題文は「y がどうこう」と言っていないので (そもそも，問題文に「y」は含まれていない)，これではおかしい．こういうケースでは，y は「すべての y」か「ある y」かのどちらかで束縛されていることが多い．問題文の意味を考えると「筑波大生は全員，**あるコンピュータ**のユーザ ID を持っている」ということであるので，それを論理式にすればよい．

解答. 上記の考察より，$\forall x.\ (T(x) \Rightarrow \exists y.\ H(x,y))$ である．

補足. 上記と同様の考察により，$\forall x.\ \exists y.\ (T(x) \Rightarrow H(x,y))$ と答えた人がいるかもしれない．本問においては，この論理式でも正解とする．

一方， $\exists y.\ \forall x.\ (T(x) \Rightarrow H(x,y))$ というのも，正解と非常によく似ている論理式であるが，これは間違いである．なぜ，間違いかは，次の問題の解答を読めばわかる．

(c) 「筑波大生全員がユーザ ID を持っているコンピュータがある」という文を，上記の T(x), H(x,y) (と論理記号) を使って表現しなさい．

解答. この問題文は，前問とは違い,「1 つのコンピュータに対して，筑波大生全員がユーザ ID をもっている」ことを表している (前問では,「筑波大生 1 人 1 人がユーザ ID をもっているコンピュータは，それぞれ異なっていてもよかったが，本問では，同じコンピュータでないといけない．) これをどうしたものか，といえば,「ある」の記号を外にだして，$\exists y.\ \forall x.\ (T(x) \Rightarrow H(x,y))$ とするとよい．この論理式は,「どんな筑波大生もユーザ ID をもっているコンピュータ y が存在する」ということになる．

問 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合たちが、互いに等しいかどうか判定せよ。(等しい場合はその根拠を簡潔に述べ、等しくない場合は具体的な反例をあげよ。なお、反例は無闇に大きな集合を考えず、要素数が 2-3 個程度の小さな集合の範囲で考えるとよい。)

(a) 集合 $S \cup (T \cap U)$ と集合 $(S \cup T) \cap U$ と集合 $(S \cup T) \cap (S \cup U)$

解答. $S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U)$ である．また，これらと $(S \cup T) \cap U$ は必ずしも等しくない．

1 つ目と 3 つ目が等しいことの根拠: 集合 S_1, S_2 が等しいことを示すには、任意の x に対して $(x \in S_1) \Rightarrow (x \in S_2)$ となること、および、その逆を示せばよい。

$x \in (S \cup (T \cap U))$ とは,「$(x \in S)$」であるか、または、「$(x \in T)$ かつ $(x \in U)$」ということである．一方, $x \in (S \cup T) \cap (S \cup U)$ とは,「$(x \in S)$ または $(x \in T)$」かつ「$(x \in S)$ または $(x \in U)$」ということである．

これら 2 つは論理的に同値であるので (第 1 章で、$A \vee (B \wedge C)$ と $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ が論理的に同値ということを学んだので)、$S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U)$ である.

1 つ目と 2 つ目が等しくないことの根拠 (反例): $S = \{1\}$, $T = \{\}$, $U = \{\}$ とすると，$S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U) = \{1\}$，$(S \cup T) \cap U = \{\}$ となり一致しない.

(b) 集合 $(S \cup T) - U$ と集合 $S \cup (T - U)$ と集合 $(S - U) \cup (T - U)$

解答. $(S \cup T) - U = (S - U) \cup (T - U)$ であり，これらと $S \cup (T - U)$ は必ずしも等しくない.

1 つ目と 3 つ目が等しいことの根拠: $x \in ((S \cup T) - U)$ とは、「「$x \in S$ または $x \in T$」であって、かつ、$x \notin U$ であること」である。$x \in ((S - U) \cup (T - U))$ とは、「$x \in S$ かつ $x \notin U$」 または 「$x \in T$ かつ $x \notin U$」である。これら 2 つは論理的に同値であるので、両者は一致する。

1 つ目と 2 つ目が等しくないことの根拠 (反例): $S = U = \{1\}$, $T = \{2\}$ とすると、$(S \cup T) - U = \{2\}$, $S \cup (T - U) = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ となり一致しない。

(c) 集合 $(S \cup T) \times U$ と集合 $(S \times U) \cup (T \times U)$.

解答. $(S \cup T) \times U = (S \times U) \cup (T \times U)$ である。

その根拠。

(1) $x \in ((S \cup T) \times U)$ と仮定する。これを解きほぐすと、$x = \langle y, z \rangle$ かつ $y \in (S \cup T)$ かつ $z \in U$ となる y, z が存在する。よって $y \in S$ かまたは $y \in T$ である。

$y \in S$ のとき、$x = \langle y, z \rangle \in S \times U$ となり、$x \in ((S \times U) \cup (T \times U))$ である。$y \in T$ のときも、同様に、$x \in ((S \times U) \cup (T \times U))$ である。以上から、いずれに場合でも、$x \in ((S \times U) \cup (T \times U))$ が言えた。

(2) 今度は、$x \in ((S \times U) \cup (T \times U))$ と仮定する。すると、$x \in S \times U$ か $x \in T \times U$ である。$x \in S \times U$ のとき、$x = \langle y, z \rangle$ かつ $y \in S$ かつ $z \in U$ となる y, z が存在する。$y \in S \cup T$ もいえる。よって、$x = \langle y, z \rangle \in (S \cup T) \times U$ である。

$x \in T \times U$ のときも同様である。よって、いずれにしても、$x = \langle y, z \rangle \in (S \cup T) \times U$ であることが言える。

問 3 (有限集合の要素数)

S が有限集合のとき、$\#S$ は S の要素数をあらわす。(なお、S の要素数を $|S|$ と書くこともある。) また，$y \in \mathcal{N}$ に対して，$D_y = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 1000$ かつ x は y の倍数 $\}$ とする.

(a) 集合 S, T に対して $\#(S \cup T)$ を、$\#S$、$\#T$、$\#(S \cap T)$ を使って表せ。

解答. $S \cup T$ の各要素は、(1) $S - T$ の要素 (S のみに属する要素)、(2) $T - S$ の要素 (T のみに属する要素)、(3) $S \cap T$ の要素 (S と T の両方に属する要素) の 3 通りに (重複なく) 分類できる。一方、S の要素は (1) と (3) の要素に分類でき、T の要素は (2) と (3) の要素に分類でき、$\#S + \#T$ は、(1) の要素数,(2) の要素数,(3) の要素数の 2 倍の和である。よって、$S \cup T = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ となる。

(b) $\#(D_2 \cap D_7)$ を計算せよ.

解答. 1 以上 1000 以下で、2 の倍数かつ 7 の倍数となっている整数の個数を数えればよい。(あるいは、$D_2 \cap D_7 = D_{14}$ と考えてもよい。) 1000 ÷ 14=71 (余り 6) であるので、$\#(D_2 \cap D_7) = 71$ である。

(c) $\#(D_2 \cup D_7)$ を計算せよ.

解答. 前々問および前問の結果を使う。

$\#(D_2 \cup D_7) = \#D_2 + \#D_7 - \#(D_2 \cap D_7) = 500 + 142 - 71 = 571$ となる。

(d) $\#(D_2 \cap D_8)$ と $\#(D_2 \cup D_8)$ を計算せよ.

解答. $D_2 \cap D_8 = D_8$ なので、$\#(D_2 \cap D_8) = 125$ である。

また、$D_2 \cup D_8 = D_2$ なので、$\#(D_2 \cup D_8) = 500$ である。

(e) $\#(D_2 \cap D_5 \cap D_9)$ を計算せよ.

解答. $D_2 \cap D_5 \cap D_9 = D_{90}$ なので、$\#(D_2 \cap D_5 \cap D_9) = \#D_{90} = 11$ となる。

(f) $\#(D_2 \cup D_5 \cup D_9)$ を計算せよ.

解答. いろいろな計算法があるが、ここでは素朴に考えよう。

集合 $(D_2 \cup D_5 \cup D_9)$ の要素は、以下のものに分類できるので、それをカウントする。

A 2 の倍数であって、5 の倍数でなく、9 の倍数でもないもの

B 5 の倍数であって、9 の倍数でなく、2 の倍数でもないもの。

C 9 の倍数であって、2 の倍数でなく、5 の倍数でもないもの。

D 2 と 5 の倍数であって、9 の倍数でないもの。

E 5 と 9 の倍数であって、2 の倍数でないもの。

F 9 と 2 の倍数であって、5 の倍数でないもの。

G 2 と 5 と 9 の倍数であるもの。

まず、集合 G の大きさは (1000 以下の 90 の倍数なので) 11 である。D の大きさは (10 の倍数は 100 個あり、そのうち G の要素を除くので) 89 である。同様に、E,F の大きさは、それぞれ、11、44 である。

A の大きさを数えるには、「2 の倍数のうち、5 の倍数か 9 の倍数であるもの」を数えればよい。2 の倍数は 500 個あり、5 の倍数か 9 の倍数であるものは、D、F,G でカバーされるので合計 144 個である。よって A の大きさは 500-144=356 である。同様に、B,C の大きさは、それぞれ、89,45 である。

集合 $(D_2 \cup D_5 \cup D_9)$ の要素数は、A から G の総和なので、356+89+45+89+11+44+11 = 645 となる。

なお、次の「発展課題」を使うと、より系統的に解くことができる。すなわち、$\#D_2 + \#D_5 + \#D_9 - \#(D_2 \cap D_5) - \#(D_5 \cap D_9) - \#(D_9 \cap D_2) + \#(D_2 \cap D_5 \cap D_9) = 500 + 200 + 111 - 100 - 22 - 55 + 11 = 645$ である。

(g) (発展課題) 集合 S, T, U に対して $\#((S \cup T) \cup U)$ を、$\#S$、$\#T$、$\#U$、$\#(S \cap T)$, $\#(T \cap U)$, $\#(U \cap S)$, $\#((S \cap T) \cap U)$ を使って表せ。

解答. まず、問 (a) の答えを集合 $S \cup T$ と集合 U に対して使うと、$\#((S \cup T) \cup U) = \#(S \cup T) + \#U - \#((S \cup T) \cap U)$ となる。ここで $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ である。

また、$(S \cup T) \cap U = (S \cap U) \cup (S \cap U)$ であるので、これに問 (a) の答えを適用すると、$\#((S \cup T) \cap U) = \#(S \cap U) + \#(T \cap U) - \#((S \cap U) \cap (T \cap U))$ となる。ここで、$(S \cap U) \cap (T \cap U) = S \cap T \cap U$ である。

以上をまとめると、$\#((S \cup T) \cup U) = \#S + \#T + \#U - \#(S \cap T) - \#(S \cap U) - \#(T \cap U) + \#(S \cap T \cap U)$ となる。