『離散構造』 1章の演習問題の解答 (亀山)
2011.12.9 演習分

問 1 次の日本語の文を論理式で表現した上で、恒真式かどうかを真理値表を用いて決定せよ。(基本命題の取り方は適宜おこなうこと)

- アメリカがくしゃみをすると日本が風邪を引く。日本が風邪を引くと世界の景気が悪くなる。よって、アメリカがくしゃみをすると世界の景気が悪くなる。

  解答. P=「アメリカがくしゃみをする」、Q=「日本が風邪を引く」、R=「世界の景気が悪くなる」とすると、$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ となり、以下の真理値表により，恒真式であるとわかる。

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	論理式全体
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

- A 君はゲームを持っているか、食事をしていれば、にこにこしている。A 君はにこにこしていない。よって、A 君はゲームを持っていない。

  解答. P=「A 君はゲームを持っている」、Q=「A 君は食事をしている」、R=「にこにこしている」とすると、$(((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge (\neg R)) \Rightarrow (\neg P)$ となり、以下の真理値表により，恒真式であるとわかる。

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$	$\neg R$	$((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge (\neg R)$	$\neg P$	式全体
T	T	T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

- B 君が勉強すると、C 君も勉強する。C 君が勉強すると B 君も勉強する。よって、B 君も C 君も勉強する。

  解答. P=「B 君が勉強する」、Q=「C 君が勉強する」とすると、$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \wedge Q)$ となり、以下の真理値表により，恒真式でないとわかる。

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \wedge Q$	式全体
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	T

問 2 例題にならって、以下の論理式をそれぞれ論理積標準形にしなさい。

- $\neg((A \vee B) \wedge (C \vee D))$.

  解答. 以下のような順番で、同値な論理式に変形できる。

  1. $\neg((A \vee B) \wedge (C \vee D))$
  2. $(\neg(A \vee B)) \vee (\neg(C \vee D))$ (1 に、$\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow ((\neg X) \vee (\neg Y))$ を適用)
  3. $((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (\neg(C \vee D))$ (2 に、$\neg(X \vee Y)) \Leftrightarrow ((\neg X) \wedge (\neg Y))$ を適用)
  4. $((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee ((\neg C) \wedge (\neg D))$ (3 に、$(\neg(X \vee Y)) \Leftrightarrow ((\neg X) \wedge (\neg Y))$ を適用)
  5. $((\neg A) \vee ((\neg C) \wedge (\neg D))) \wedge ((\neg B) \vee ((\neg C) \wedge (\neg D)))$ (4 に、$((X \wedge Y) \vee Z) \Leftrightarrow ((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z))$ を適用)
  6. $((\neg A) \vee (\neg C)) \wedge ((\neg A) \vee (\neg D))$
     $\wedge ((\neg B) \vee (\neg C)) \wedge ((\neg B) \vee (\neg D))$

  最後の論理式で、括弧を適宜省略すると、以下の論理積標準形となる。

  $$(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg D)$$

  (なお、括弧を省略しなくても、論理積標準形である。)

- $\neg((A \vee \neg(B \wedge C)) \wedge D)$.

  解答. 以下のような順番で、同値な論理式に変形できる。今度は、適用した規則を省略する。また、括弧も適宜省略する。

  1. $\neg((A \vee \neg(B \wedge C)) \wedge D)$
  2. $(\neg(A \vee \neg(B \wedge C))) \vee (\neg D)$
  3. $(\neg A \wedge (\neg\neg(B \wedge C))) \vee \neg D$
  4. $(\neg A \wedge (B \wedge C)) \vee \neg D$
  5. $(\neg A \vee \neg D) \wedge ((B \wedge C) \vee \neg D)$
  6. $(\neg A \vee \neg D) \wedge (B \vee \neg D) \wedge (C \vee \neg D)$

  [補足] 論理積標準形 (CNF) は、「恒真式かどうか」を判定するのが非常に容易である。その理由を各自考えられたい。

- (発展課題) 論理記号を 3 個持つ命題論理式を論理積標準形にしたとき、含まれる論理記号の最大値はいくつか。(ここでは、論理記号として、$\wedge, \vee, \neg$ のみを考える。また、論理式を記述するときかっこを使ってよいが、かっこは論理記号とは見なさない。)

  解答. 系統的に考えるとすると、「標準形への変換で、最も長くなるパターン」を考えると、$(A \wedge B) \vee C$ のように、and と or が入れ子になっているときである。また、not は、(使うとしたら) 一番外に 1 回だけ使うのがよいということもわかる。これらをもとに、試行錯誤すると、$\neg((A \vee B) \wedge C)$ というパターンの論理式が、$(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C)$ という長さ 7 の論理式になり、最も長い。

問 3 新しい論理記号として $\mathtt{maj}(a, b, c, d, e, f)$ を導入する (maj は majority を意味する)。ただし、この記号は、6 つの引数を取り、その真理値を以下のように定める。

- a, b, c, d, e, f のうち 4 つ以上が真であれば、全体は偽。3 つ以下が真であれば、全体は真。

以下の問に答えなさい。

(a) $\mathtt{maj}(a, a, a, a, a, a)$ が $\neg a$ と同値であることを示せ。

解答. $a = F$ のとき、$\mathtt{maj}(a, a, a, a, a, a) = T$ であり、$a = T$ のとき、$\mathtt{maj}(a, a, a, a, a, a) = F$ となるので、$\mathtt{maj}(a, a, a, a, a, a) = F$ は $\neg a$ と同値である。

(b) $\mathtt{maj}(a, b, T, T, T, F)$ はどういう命題と同値か?

解答. a, b が取り得る真理値の組合せを全て調べると、$(a, b) = (T, T), (T, F), (F, T)$ のとき、$\mathtt{maj}(a, b, T, T, T, F) = F$ であり、$(a, b) = (F, F)$ のとき、$\mathtt{maj}(a, b, T, T, T, F) = T$ である。よって、$\mathtt{maj}(a, b, T, T, T, F)$ は $\neg(a \vee b)$ と同値である。(これは、$(\neg a) \wedge (\neg b)$ とも同値なので、そう答えてもよい。他にも無数に多くの同値な論理式がある。)

(c) $a \wedge b$ と同値な命題を、$\mathtt{maj}$ と F と a と b だけで作れ。

解答. T は $\neg F$ と同値であるので $\mathtt{maj}(F, F, F, F, F, F)$ と同値である。この事と前問の結果より、$(\neg a) \wedge (\neg b)$ を作ることができる。これらを組み合わせればよい。一例は以下の通り。(もっと短いものは、各自考えてほしい。)

$$\mathtt{maj}(\mathtt{maj}(a, a, a, a, a, a), \mathtt{maj}(b, b, b, b, b, b), \mathtt{maj}(F, F, F, F, F, F), \mathtt{maj}(F, F, F, F, F, F), \mathtt{maj}(F, F, F, F, F, F), F)$$

(d) $a \vee b$ と同値な命題を、$\mathtt{maj}$ と F と a と b だけで作れ。

解答. 前問と同様である。一例は以下の通り。

$$\mathtt{maj}(\mathtt{maj}(a, a, a, a, a, a), \mathtt{maj}(b, b, b, b, b, b), \mathtt{maj}(F, F, F, F, F, F), \mathtt{maj}(F, F, F, F, F, F), F, F)$$

(e) $a \Rightarrow b$ と同値な命題を、$\mathtt{maj}$ と F と a と b だけで作れ。

解答. $a \Rightarrow b$ は、$(\neg a) \vee b$ と同値である。一例は以下の通り。

$$\mathtt{maj}(a, \mathtt{maj}(b, b, b, b, b, b), \mathtt{maj}(F, F, F, F, F, F), \mathtt{maj}(F, F, F, F, F, F), F, F)$$

(f) T と F を使わずに、$\mathtt{maj}$ と a と b だけをつかって、$a \vee b$ と同値な命題を作ることができるか？

解答. 作れる。

まず、$\neg a$ と同値な命題は、 $\mathtt{maj}(a, a, a, a, a, a)$ として作れる。

次に、これを使って、$\mathtt{maj}(a, a, a, \neg a, \neg a, \neg a)$ とすると (ただし $\neg a$ のところは実際は $\mathtt{maj}(a, a, a, a, a, a)$ をいれる)、a が真だろうと偽だろうと、$a, a, a, \neg a, \neg a, \neg a$ の中に真であるものは 3 つなので、$\mathtt{maj}(a, a, a, \neg a, \neg a, \neg a)$ はいつでも真である。つまり、 T という命題を作ることができた。

これを使うと、$\mathtt{maj}(T, T, T, T, T, T, T)$ とやることにより F ができるから、前問までの結果により、$a \vee b$ と同値な論理式を作ることができる。(この論理式を具体的に書きくだすと、かなり長くなるので省略する。)

補足. 本問は、ちょっとした「ひっけか」問題である。本問は、去年の演習問題と酷似した内容であるが、昨年のこの問題の答えは「作れない」だったのに、今年版では「作れる」となって、答えが違っている。つまり、昨年の解答をそのままコピーしていては駄目ということである。

昨年版は、5 個の命題の多数決であったのに対し、今年は、6 個の命題の多数決である。5 個でも 6 個でも変わらないだろう、と一瞬思ってしまうが、5 個の多数決では (「引き分け」がないので)、T と同値な命題を作れないのだが、6 個の多数決では、「引き分け」状態にすることにより T や F と同値な命題が作れてしまうところが異なっている。