『離散構造』 6 章 (帰納) の演習問題

亀山

問題 1 (集合の帰納的定義)

(a) 「整数」を表す文字列の集合 S_1 を帰納的に定義せよ．ただし，十進数とする．たとえば，`100` や `-123` は S_1 の要素であり，`0010` や，`3.14` は S_1 の要素ではない．

また，その定義は，曖昧さがないか？(1 つの整数に対して，複数の導出はないか？)

(b) 「小数」を表す文字列の集合 S_2 を帰納的に定義せよ．ただし，十進数とする．たとえば，`100` や `10.1540` や`-0.256` は S_2 の要素であり，`0010.154` や `10e10` は S_2 の要素ではない．

また，その定義は，曖昧さがないか？(1 つの小数に対して，複数の導出はないか？)

問題 2 (関数の帰納的定義)

次の帰納的定義により、式の集合 E を定める．(本問では，定義される式を，地の文と区別するため「..」で囲うことにする.「」そのものは 式の一部ではないことに注意せよ．)

- 「0」と「1」は式である．
- 「e_1」と「e_2」が式ならば,「$(e_1 \;@\; e_2)$」 は式である．
- 「e_1」と「e_2」が式ならば,「$(e_1 \;\#\; e_2)$」 は式である．

このように定義された式に対して次の関数 $f : E \to \mathcal{N}$ と $g : E \to E$ を帰納的に定義する．

$$f(e) = \begin{cases} 0 & \text{if } e = \text{「}0\text{」} \\ 1 & \text{if } e = \text{「}1\text{」} \\ f(e_1) \cdot f(e_2) & \text{if } e = \text{「}(e_1 \;@\; e_2)\text{」} \\ f(e_1) + f(e_2) - f(e_1) \cdot f(e_2) & \text{if } e = \text{「}(e_1 \;\#\; e_2)\text{」} \end{cases}$$

$$g(e) = \begin{cases} \text{「}1\text{」} & \text{if } e = \text{「}0\text{」} \\ \text{「}0\text{」} & \text{if } e = \text{「}1\text{」} \\ \text{「}(g(e_1)\#g(e_2))\text{」} & \text{if } e = \text{「}(e_1 \;@\; e_2)\text{」} \\ \text{「}(g(e_1)@g(e_2))\text{」} & \text{if } e = \text{「}(e_1 \;\#\; e_2)\text{」} \end{cases}$$

これに対して，以下の問に答えよ．

(a) f(「$((0@1)\#(1@1))$」) の値を求めよ．

(b) f(「$((0\#1)@(1\#1))$」) の値を求めよ．

(c) g(「$((0@1)\#(1@1))$」) の値を求めよ．

(d) g(「$((0\#1)@(1\#1))$」) の値を求めよ．

(e) g が E から E への関数であることを確かめなさい．

(f) (帰納法) 上で定義された式と関数 f に対して,「任意の式 e に対して，$f(e) = 0 \lor f(e) = 1$ である」ことを証明しなさい．

(g) (帰納法) 上で定義された式と関数 f, g に対して,「任意の式 e に対して，$f(g(e)) + f(e) = 1$ である」ことを証明しなさい．