# 離散構造 期末試験 (1,2 クラス用)

2008 年 3 月 7 日 (金)

解答用紙は 2 枚である (1 枚しか必要ない場合でも，2 枚提出せよ)．**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．解答用紙の裏面を使用してもよい．問題の順番通りに解答を記述する必要はないが，解答には必ず問題番号 ((1-a) など) を明記せよ．

**問 1 (論理: 総配点 20 点)** 次の $P, Q, R$ は，あるシステムの仕様 (そのシステムが満たすべき性質) である．(The following sentences $P, Q$ and $R$ are specifications of a system.)

| | |
|---|---|
| P: | ウィルス駆除装置を使えば，受信メールは安全である．(If we use an anti-virus system, then incoming mails are safe.) |
| Q: | ウィルスが発生して，ウィルス駆除装置を使っていれば，受信メールの配達が遅れる．(If a virus occurs and we use an anti-virus system, then the delivery of incoming mails is delayed.) |
| R: | ウィルス駆除装置を使っていなければ，受信メールは安全ではない．(If we do not use an anti-virus system, then incoming mails are not safe.) |

**(1-a: 配点 8 点)** $P$, $Q$, $R$ を，次の基本命題を使って，論理式 (命題) として表現しなさい．ただし，括弧を省略しないこと．(Represent $P, Q$ and $R$ as propositions using the following atomic propositions. Do not omit parentheses.)

| | |
|---|---|
| Use: | ウィルス駆除装置を使う． (We use an anti-virus system.) |
| Safe: | 受信メールは安全である． (Incoming mails are safe.) |
| Virus: | ウィルスが発生する． (A virus occurs.) |
| Delayed: | 受信メールの配達が遅れる． (The delivery of incoming mails is delayed.) |

**(1-b: 配点 6 点)** システムが上記の $P, Q, R$ を全て満たしているとする．このとき,「ウィルス駆除装置を使うこと」と「受信メールが安全であること」が同値であるかどうか，真理値表を用いて答えなさい．(Decide if the two propositions "we use an anti-virus system" and "incoming mails are safe" are equivalent or not, using a truth table.)

**(1-c： 配点 6 点)** システムが上記の $P, Q, R$ を全て満たしているとする.「受信メールの配達が遅れなければ，受信メールは安全でないか，ウィルスが発生していない.」という文が常に真であるかどうか，真理値表を用いて答えなさい．(Decide if the proposition "if the delivery of incoming mails is not delayed, then incoming mails are not safe or a virus does not occur" is always true or not, using a truth table.)

**問 2 (集合と関数: 総配点 26 点)**

$\mathcal{N}$ を自然数の集合 (0 を含む) とし，関数 $f : \mathcal{N} \to 2^{\mathcal{N}}$ を次のように定義する．

$$f(n) = \{i \in \mathcal{N} \mid \mathrm{bit}(n, i) = 1\}$$

ただし，$\mathrm{bit}(n, i)$ は，自然数 $n$ を 2 進数として表現した時，下から $i$ 番目の桁 (bit) を表す (一番下の桁を 0 番目とする)．($\mathrm{bit}(n, i)$ is the $i$-th bit of the binary representation of the natural number $n$ where the least significant bit is the 0-th bit.)

たとえば，10 進数の 13 は，2 進数としては 1101 と表現されるので，$\mathrm{bit}(13, 0) = 1$, $\mathrm{bit}(13, 1) = 0$, $\mathrm{bit}(13, 2) = 1$, $\mathrm{bit}(13, 3) = 1$ であり，さらに $i \geq 4$ となる $i$ に対して，$\mathrm{bit}(13, i) = 0$ である．従って，$f(13) = \{0, 2, 3\}$ となる．

また，全ての $i \in \mathcal{N}$ に対して，$\mathrm{bit}(0, i) = 0$ であるので，$f(0) = \{\}$ である．

**(2-a: 配点 10 点)** 集合 $f(15)$ と集合 $f(16)$ の要素を，それぞれ，全て列挙せよ．(Enumerate the elements of the sets $f(15)$ and $f(16)$, respectively.)

**問 2-b: 配点 8 点)** 任意の自然数 $m, n$ に対して，$f(m + n) = f(m) \cup f(n)$ が成立するかどうか理由とともに答えなさい．同様に，任意の自然数 $m$ に対して，$f(2m) = \{k + 1 \mid k \in f(m)\}$ が成立するかどうか，理由とともに答えなさい．

**(2-c: 配点 8 点)** 関数 $f$ は単射 (injective) か，また，全射 (surjective) か，理由とともに答えなさい．

**問 3 (関係とグラフ: 総配点 32 点)**

$A = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$ により集合 $A$ を定義し，$A$ 上の二項関係 $R$ と $S$ を以下のように定義する．

$$xRy \Leftrightarrow 「(x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (\text{ある素数 } p \text{ に対して}, y = px)」$$

ただし，素数 (prime number) $p$ は，2 以上の自然数で，その約数 (divisor) が 1 と $p$ だけであるものである．たとえば，2 は素数だが 4 は素数でないので，$1R2$ は成立するが，$1R4$ は成立しない．

さらに，本問では，$A$ 上の二項関係 $R$ に対応する有向グラフとして，頂点の集合が $A$ で，辺の集合が $\{\langle x, y\rangle \mid xRy\}$ となるものを考える．

**(3-a: 配点 10 点)** 有向グラフ $G$ を図示しなさい．また，$G$ のサイズ (辺の本数) と，$G$ における最長の道の長さを求めなさい．

**(3-b: 配点 6 点)** $G$ における辺の向きを無視することにより得られる無向グラフが，木であるかどうか答えなさい．(By igonoring the direction of edges in $G$, we obtain an undirected graph $G'$. Decide if $G'$ is a tree or not.)

**(3-c: 配点 8 点)** $R^2$ を $R^2 = R \circ R$ と定義される $A$ 上の二項関係とする．同様に，二項関係 $R^3 = R^2 \circ R$ を考える．これら 2 つの二項関係に対応する有向グラフを，それぞれ，図示しなさい．ただし，次数が 0 である頂点は描かなくてよい．(Draw graphs which correspond to the binary relations $R^2$ and $R^3$, respectively. You may omit vertices which do not have edges.)

**(3-d: 配点 8 点)** 前問の $R^2$ と $R^3$ を使って，$A$ 上の二項関係 $S$ を，

$$xSy \Leftrightarrow 「(x \in A) \wedge (y \in A) \wedge ((x = y) \vee (xRy) \vee (xR^2y) \vee (xR^3y))」$$

と定める．$S$ は順序 (order) であるか，理由とともに示しなさい．また，この $S$ は，どういう意味をもつ二項関係か，言葉で説明しなさい．(Explain the meaning of the binary relation $S$ in English.)

**問 4 (帰納と関数: 総配点 22 点)**

**(4-a: 配点 6 点)** 整数のリスト (list of integers) をすべて集めた集合 $List_{\mathcal{Z}}$ の帰納的定義 (inductive definition) を与えよ．ただし，空リストは $\langle\rangle$ とし，リストは cons により構成されるとする．たとえば，$\mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(-3, \mathrm{cons}(4, \langle\rangle)))$ はこの集合の要素である．(この要素のことを，$\langle 2, -3, 4\rangle$ と書くことがあるが，本問では，この記法は使わない．)

次に，$List_{\mathcal{Z}}$ を定義域 (domain) とする関数 $\mathrm{g} : List_{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Z}$ を，次のように定義する．

$$\mathrm{g}(L) = \begin{cases} 1 & \text{if } L = \langle\rangle \\ x \times \mathrm{g}(M) & \text{if } L = \mathrm{cons}(x, M) \end{cases}$$

ただし，$\times$ は整数のかけ算をあらわす．(The binary operator $\times$ represents the multiplication of two integers.)

**(4-b: 配点 8 点)** $\mathrm{g}(\mathrm{cons}(4, \langle\rangle))$ と $\mathrm{g}(\mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(-3, \mathrm{cons}(4, \langle\rangle))))$ の値を，それぞれ，定義に従って計算せよ．ただし，結果だけでなく，計算の途中経過も明示せよ．(Show not only the results but also the process of computation.)

**(4-c: 配点 8 点)** $g(L_1 \oplus L_2) = g(L_1) \times g(L_2)$ を $L_1$ に関する帰納法で証明せよ．(Prove $g(L_1 \oplus L_2) = g(L_1) \times g(L_2)$ by induction on $L_1$.)

ただし，$\oplus$ は 2 つのリストを連結 (concatenate) する関数であり，以下のように定義される．

$$L_1 \oplus L_2 = \begin{cases} L_2 & \text{if } L_1 = \langle\rangle \\ \mathrm{cons}(x, (M \oplus L_2)) & \text{if } L_1 = \mathrm{cons}(x, M) \end{cases}$$

(問題は以上である．)