離散構造 期末試験 (1,2 クラス用) 解答の概要と成績評価

2008 年 3 月 12 日 (水)

1　解答概要

問 1 (論理: 総配点 20 点)

(1-a: 配点 8 点, 命題を表現する問題)

これは、点取り問題であり、解説は不要であろう。

$$P \equiv \text{Use} \Rightarrow \text{Safe}$$
$$Q \equiv (\text{Virus} \wedge \text{Use}) \Rightarrow \text{Delayed}$$
$$R \equiv (\neg\text{Use}) \Rightarrow (\neg\text{Safe})$$

(主な減点対象) 問題文に「括弧を省略しないこと」と明記してあるのに、Q を Virus $\wedge$ Use $\Rightarrow$ Delayed 等と書いている人が多かった。この場合 1 点だけ減点した。

(1-b: 配点 6 点)

$(P \wedge Q \wedge R) \Rightarrow (\text{Use} \Leftrightarrow \text{Safe})$ が, いつでも真かどうか (トートロジーかどうか) を真理値表で調べる問題である。

基本命題が 4 つあるので、16 行の真理値表を書くのが普通である。そのように書いてもよいが、実は、P と R のみから、Use $\Leftrightarrow$ Safe がトートロジーになることが言えるので、基本命題として Use と Safe の 2 つをとった 4 行の真理値表をかいてもよい。ここでも、そうする。

Use	Safe	Use $\Leftrightarrow$ Safe	P	R	$P \wedge R$	$(P \wedge R) \Rightarrow$ (Use $\Leftrightarrow$ Safe)
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

このようにして、P, Q, R がすべて成立しているとき、Use と Safe は同値であることがわかった。

(解説) もちろん、16 行の真理値表を書いてもよい。また、真理値表と推論 (対偶命題は同値であることを使う、など) を組みあわせて解答したものも正解とした。

(1-c： 配点 6 点)

この問題の命題は、$(\neg\text{Delayed}) \Rightarrow ((\neg\text{Safe}) \vee (\neg\text{Virus}))$ と表すことができる。(以下では、この命題を S とする。)

そこで、4 つの基本命題からなる 16 行の真理値表を作って、$(P \wedge Q \wedge R) \Rightarrow S$ がトートロジーであることを示すのが普通のやりかたである。前問と同様に本問でも工夫して、小さな真理値表で済ませることもできるが、せっかくなので、16 行のものをここでは記載する。

Safe	Use	Virus	Delayed	Q	S	$Q \Rightarrow S$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

このようにして、Q が成立しているとき、S は真であることがわかった。

(解説) 他の方法でも、ともかく、解けていれば、正解とした。一番多い誤答は、16 行の巨大な真理値表を書くときに、計算を間違えたものである。

問 2 (集合と関数: 総配点 26 点)

(2-a: 配点 10 点) 15 は 2 進数で 1111 と表現されるので、$f(15) = \{0, 1, 2, 3\}$ である。

また、16 は 2 進数で 10000 なので、$f(16) = \{4\}$ である。

問 2-b: 配点 8 点) 「任意の自然数 m, n に対して，$f(m+n) = f(m) \cup f(n)$ が成立する」という命題は偽なので、反例を 1 つ作成する。たとえば、$f(1) = \{0\}$ で $f(2) = \{1\}$ なので、$f(1) \cup f(1) \neq f(2)$ となり、反例となる。

「任意の自然数 m に対して，$f(2m) = \{k+1 \mid k \in f(m)\}$ が成立する」は真である。これをきちんと (帰納法で) 証明してもよいが、本問では簡潔な理由が書いてあればよい。たとえば、以下のような理由である。

10 進数を 2 倍する、という操作は、2 進数では一番下の桁に 0 を書き加える、という操作に対応する。従って、$k \in f(m)$ であることと、$k+1 \in f(2m)$ であることが同値であるので上記の命題が成立する。

(解説) 採点にあたっては、本問は思いっきり甘くして「桁上がり」に言及していれば、正解とした。

(2-c: 配点 8 点) 関数 f は単射である。これもきちんとした証明は必要なく、簡潔な理由でよい。

(以下では、$f(m) = f(n)$ から $m = n$ を導く) $f(m) = f(n)$ とすると、m の k ビット目 (2 進数としての表現の下から k 番目) は、n の k ビット目と同じ値である。従って、m と n の 2 進数としての表現はまったく同じであるので、$m = n$ である。

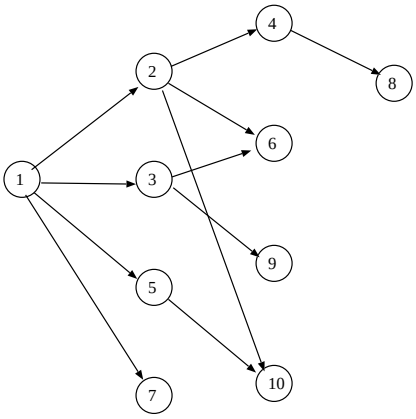
採点にあたっては、「2 進数として同じになる」ことが少しでも書かれていればよいものとした。

関数 f は全射ではない。値域 $2^{\mathcal{N}}$ は $\mathcal{N}$ の部分集合たちからなる集合なので、$\mathcal{N} \in 2^{\mathcal{N}}$ である。ところが、$f(n) = \mathcal{N}$ となるような $n \in \mathcal{N}$ は存在しない。(全てのビットが 1 であるような 2 進数は、無限に大きくなってしまい、自然数ではない。) 従って、f は全射ではない。

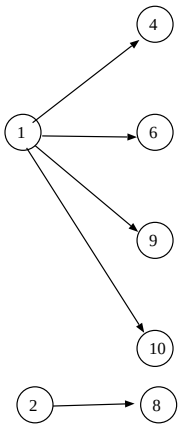
(解説) 本問は難しかったようである。ほとんどの人は、「f は全射である」として、その理由を説明していた。もし、f の値域を、「$\mathcal{N}$ の部分集合のうち、有限集合になるもの」に限定すれば、f は全射になっていた。しかし、実際には $2^{\mathcal{N}}$ の要素には、無限集合となるものがたくさんあるので、(自然数の集合全体、偶数の集合、奇数の集合、など) f は全射にはならない。

問 3 (関係とグラフ: 総配点 32 点)

(3-a: 配点 10 点)



(3-a) diercted graph G



(3-c) graph for R^2

(3-c) graph for R^3

サイズは、グラフの辺の本数なので 11 となり、最長の道の長さは 3 である。

(3-b: 配点 6 点)

木にならない。なぜなら、1-2-6-3-1 という閉路があるので。(あるいは 1-2-10-5-1 という閉路があるので。)

(3-c: 配点 8 点)

R^2 は要するに、R に対応するグラフ G の上で、「長さ 2 の道で到達できる」という関係である。具体的には、1-2-4 という道があるので、1 R^2 4 となる。R^3 は、R に対応するグラフ G の上で、「長さ 3 の道で到達できる」という関係である。結局、

$$R^2 = \{\langle 1,4\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 1,9\rangle, \langle 1,10\rangle, \langle 2,8\rangle\}$$

となり、

$$R^3 = \{\langle 1,8\rangle\}$$

となる。グラフは、このページの上の方に記載した。

(解説) 本問は、それなりに難しかったようである。多かった間違いは、

$$R^2 = \{\langle 1,4\rangle, \langle 1,9\rangle\}$$

としてしまうものであった。xR^2y が成立するのは、「ある素数 p と q があって、$y = pqx$ となる」ときなのだが、勘違いして、「ある素数 p があって、$y = p^2x$ となる」と考えてしまた、という誤答がいくつかあった。おそらく R^2 という表記に惑わされて、数の 2 乗を考えてしまたのだろうが、そのような誤答をした人は、関係の合成の定義をもう一度復習してほしい。

(3-d: 配点 8 点)

S は順序であるので、証明する。S の要素を全て列挙して証明すればよい。

$$S = \{\langle x,x\rangle \mid x \in A\} \cup \{\langle 1,x\rangle \mid x \in A\} \cup \{\langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 5,10\rangle\}$$

となる。

(反射律) $\langle x,x\rangle$ の形の対がすべて要素となっているので反射律をみたす。

(推移律) xSy かつ ySz と仮定する。$x = y$ の場合は、容易に xSz がいえる。$y = z$ の場合も同様である。さらに、$x = 1$ の場合も容易に xSz がいえる。残る場合は、$(x,y,z) = (2,4,8)$ の場合のみであり、この場合も、xSz である。以上から、推移律をみたす。

(反対称律) xSy ならば、$x \leq y$ である。そこで、xSy かつ ySx ならば、$x \leq y$ かつ $y \leq x$ となって、結局 $x = y$ となり、反対称律をみたす。

以上から、S が順序であることがいえた。

上記の S は、A の要素の間の「約数になっている」という関係を表している。

(解説) 順序であることの証明は詳細に書くと大変なので、多少縮めて書いたものも正解とした。ただし、特に推移律が成立する理由をまったく書いていないものは減点した。また、S の意味を「約数になっている」と答えられた人が少なかったのは意外だった。(とはいえ、これが答えられるかどうかは離散構造の授業の主題ではないので、その事の配点は 2 点だけである。)

問 4 (帰納と関数: 総配点 22 点)

(4-a: 配点 6 点)

整数リストの集合 $List_{\mathcal{Z}}$ は、空リストと、リストを構成する操作 cons で構成されるので、以下のように帰納的に定義できる。

- $\langle\rangle \in List_{\mathcal{Z}}$ (空リストは、整数リストである。)
- $(x \in \mathcal{Z}) \wedge (L \in List_{\mathcal{Z}}) \Rightarrow \mathrm{cons}(x, L) \in List_{\mathcal{Z}}$. ($x$ が整数で、L が整数リストなら、$\mathrm{cons}(x, L)$ は整数リストである。)

(解説) 本問のでき具合いは私には、衝撃的であった。本問は、授業で説明した「自然数リストの集合」の定義とほとんど同じで、自然数を整数に変更しただけである。したがって、ほぼ全員ができるはずと思っていたのだが (非常に見え見えの「点取り問題」であったはずだが)、実際は、正答できた人は 1 割もいない、という惨敗であった。

私の教え方がまずかったのだろうか、それとも、今年は、文字列の演習ばかり授業でやったので、皆さんがリストは出るはずがないと思い、勉強しなかったたであろうか。しかし、授業の最終回で、「リストの帰納法をだします」とかなりはっきり言ったので、当然、リストの帰納的定義も勉強してくれるものと思っていたのだが。。。

次の (4-b) は、ほとんどの人が正答していたのと対照的である。(そちらは、5〜6 割の人しかできないと思っていた。) 帰納的な関数定義や帰納法も大事だが、その前にまず、集合の帰納的定義をもう一度勉強して、本問程度はできるようになってほしい。

(4-b: 配点 8 点)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{g}(\mathrm{cons}(4, \langle\rangle)) &= 4 \times \mathrm{g}(\langle\rangle) \\
&= 4 \times 1 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{g}(\mathrm{cons}(2,\ \mathrm{cons}(-3,\ \mathrm{cons}(4, \langle\rangle)))) &= 2 \times \mathrm{g}(\mathrm{cons}(-3,\ \mathrm{cons}(4, \langle\rangle))) \\
&= 2 \times (-3 \times \mathrm{g}(\mathrm{cons}(4, \langle\rangle))) \\
&= 2 \times (-3 \times 4) \\
&= -24
\end{aligned}
$$

(解説) こちらは正答率が高く、大変 happy である。

(4-c: 配点 8 点) すべての整数リスト L_1, L_2 に対して $g(L_1 \oplus L_2) = g(L_1) \times g(L_2)$ が成立することを L_1 に関する帰納法でする。

(Base Case) $L_1 = \langle\rangle$ のとき。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= g(L_1 \oplus L_2) \\ &= g(\langle\rangle \oplus L_2) \\ &= g(L_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= g(L_1) \times g(L_2) \\ &= g(\langle\rangle) \times g(L_2) \\ &= 1 \times g(L_2) \\ &= g(L_2) \end{aligned}$$

となり、左右両辺が一致する。

(Induction Step) $L_1 = \mathrm{cons}(x, M)$ のとき、

M に対しては、上記の証明対象となっている命題が成立すると仮定して、L_1 に対しても、成立することを証明する。もっと詳しくいうと、$g(M \oplus L_2) = g(M) \times g(L_2)$ を仮定して、$g(L_1 \oplus L_2) = g(L_1) \times g(L_2)$ を証明する。

$$\begin{aligned} g(L_1 \oplus L_2) &= g(\mathrm{cons}(x, M) \oplus L_2) \\ &= g(\mathrm{cons}(x, (M \oplus L_2))) \\ &= x \times g(M \oplus L_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(L_1) \times g(L_2) &= g(\mathrm{cons}(x, M)) \times g(L_2) \\ &= (x \times g(M)) \times g(L_2) \end{aligned}$$

ここで、上記の仮定 (帰納法の仮定) を使って、$x \times g(M \oplus L_2) = x \times (g(M) \times g(L_2)) = (x \times g(M)) \times g(L_2)$ となるので、結局、$g(L_1 \oplus L_2) = g(L_1) \times g(L_2)$ が証明できた。

以上より、L_1 に関する帰納法を使って、すべての整数リスト L_1, L_2 に対して $g(L_1 \oplus L_2) = g(L_1) \times g(L_2)$ が成立することが言えた。(証明おわり)

(解説) 授業で、ほとんど同じような証明をしたので、特に追加して説明することはない。本問は、例年できがわるいのだが、今年は例年よりはよくできていたように思う。誤答としては、「リストに関する帰納法で証明せよ」と書いてあるのに、「自然数に関する数学的帰納法」を使おうとしている人などがあった。

2 成績評価

期末試験は 100 点満点で採点した。部分点をなるべく拾うように採点したので、答え自体がまちがっていても、点がついていることがある。一方、答えがあっていても、理由をまったく書いていない場合は、点数は付与していない。

	点数分布
90 点以上	3 人
80-89 点	8 人
70-79 点	15 人
60-69 点	15 人
50-59 点	7 人
40-49 点	3 人
0-39 点	0 人
受験せず	5 人

最高点は、92 点の小倉君と中川君であった。また、91 点で栗原君が続いた。素晴しい!

最終成績は以下の 3 つのものを合計した。

- 期末試験の点数: 100 点満点。
- 出席点: 欠席回数 2 回以下は減点ゼロとし、それ以上欠席すると 1 回につき 5 点減点。
- 演習発表点: 演習の際に 1 回も解答しなかった場合は、5 点減点。(演習の解答を 2 回やってくれた人には追加点をだす、と言っていたが、そういう人はみな A の成績だったので、追加点を出すまでもなかった。)

上記をすべて合計し、75 点以上を A とし、60-74 点を B とし、50-59 点を C とし、それ以外を D とした。ただし、40-49 点については、出席状況と答案の内容を考慮して、C に繰上げた。

以上。