『離散構造』 6 章 (帰納) の演習問題
出題: 2008.2.21
期限: 2008.2.29 の授業

問題 1 (集合の帰納的定義) $\Sigma = \{a, b, c\}$ として、Σ^* の部分集合として以下のものを帰納的に定義せよ。

(a) 同じ文字が 2 文字以上連続して現れない文字列の集合。

(b) 回文の集合。ただし、回文とは「しんぶんし」「わたしまけましたわ」のように、上下どちらから読んでも同じ文 (語) のことである．空文字列 Λ も回文であるとする．

問題 2 (関数の帰納的定義)

(a) 自然数のリストが与えられた時、その総和を返す関数。

(b) 自然数のリストが与えられた時、その末尾の要素を返す関数 (引数が空リストのときは 0 を返すとする。)

(c) 長さが同じ実数のリストが 2 つ与えられた時、それらをベクトルと見なして、内積を返す関数。(2 つのリストの長さが異なるときは、0 を返す。)

(d) ラベルつき 2 分木 ($\mathrm{BinTree}_A$) の高さを返す関数。ただし、木の高さとは、根から葉までの道の長さの最大値である。(根だけからなる木の高さを 0 とせよ。)

問題 3 (自然数に対する帰納法) 自然数 a, b, c に対して $a \equiv b \mod c$ という表記は,「$a - b$ が c で割り切れる」ことを表す.

p が素数ならば，任意の自然数 n に対して $n^p \equiv n \mod p$ であることを n に関する帰納法で証明せよ．ただし，$(n+1)^p \equiv n^p + 1 \mod p$ であることを証明せずに使ってよい.

問題 4 (リストに対する帰納法、講義で未説明のため 2/29 の演習では対象外)

lengthと $\oplus$ をテキスト 48 ページの関数とするとき、任意の $L_1 \in List_A$, $L_2 \in List_A$ に対して、以下のことを証明せよ。

$$\mathrm{length}(L_1 \oplus L_2) = \mathrm{length}(L_1) + \mathrm{length}(L_2)$$

問題 5 (関数の「再帰」的定義，余力のある人のみ)

以下のように関数 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ を定義しようとしたが，これは講義で説明した帰納的な関数定義の形にはなっていない．どのような点が帰納的定義になっていないかを説明せよ．また，それにもかかわらず，以下の等式を満たす関数 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ が存在することを示せ.

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & (n > 100 \text{ の時}) \\ f(f(n+11)) & (0 \leq n \leq 100 \text{ の時}) \end{cases}$$